# Cebirsel Geometri ve Tekillik Kuramı

Kürşat Aker

8 Temmuz 2010

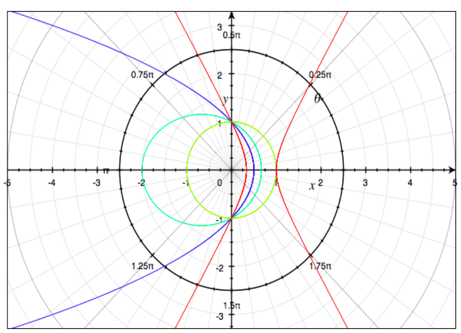
## 1 Cebirsel Geometri Nedir ?

Cebirsel geometri, cebirsel nesneler ile geometrik yaklaşımı biraraya getiren bir matematik dalıdır. Cebirsel geometrinin nesneleri, cebirsel denklemler (ing. polynomial equations) tarafından belirlenir.

Analitik geometriden bu yana düzlem, bir başlangıç noktası ve koordinat sisteminin seçimi ile, sayı ikilileri ile temsil edilmiştir. Artık $(x, y)$-düzlemi diyebileceğimiz bu düzlemdeki bir doğru $x$ ve $y$ değişkenleri arasındaki

$$2x - 3y + 5 = 0$$

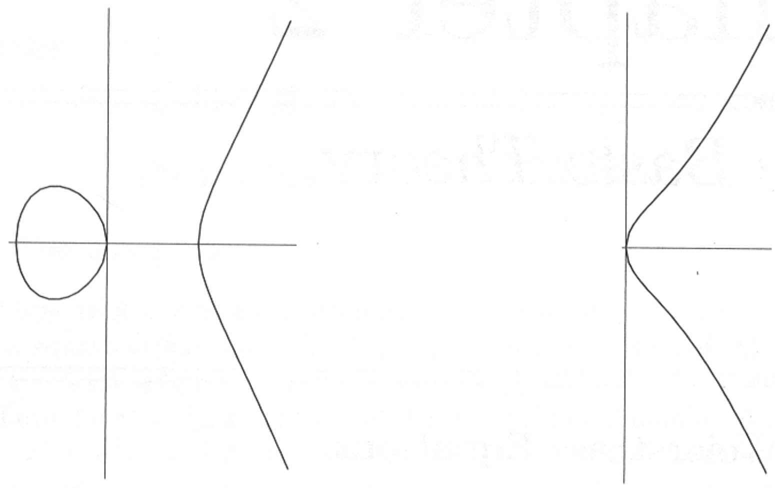
gibi doğrusal bir ilişkiye karşılık gelir. Pergeli hemşehrimiz Apollonius'un konik kesitleri ise en genel formda



$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

cebirsel denklemi ile ifade edilir.

Dünyada ve Türkiye'deki örgün eğitim müfredatları bu iki denklemi ve onların tanımladığı geometrik nesneler olan doğrular ve konik kesitleri içerir. Ne var ki, yukarıdaki denklemlerde ufak bir oynama ile elde edeceğimiz,



(a) $y^2 = x^3 - x$ (b) $y^2 = x^3 + x$

gibi cebirsel denklemler ve bunların tarif ettiği geometrik nesneler (eliptik eğriler) lise müfredatlarınca kapsanmaz. Bunun nedeni, bu kolay görünümlerine karşın, bu eğrilerin çok derin bir matematiği olmasıdır. Cebirsel geometrinin, başladığı noktanın burası olduğunu söyleyebiliriz.

Bu eğriler Kepler'in güneş sistemimizdeki gezegenlerin yörüngelerinde aldıkları yolu hesaplamak için yazdığı integraller (eliptik integraller) ile ortaya çıkmıştır. Bugün bu eğriler kodlama kuramındaki rolleri nedeniyle yaşamımızın elektronik haberleşme içeren her adımında (telefon görüşmesi, televizyon yayını, internet bağlantısı, CD, DVD vb.) kullanılmaktadır.

Aynı eğrilerin daha ayrıntılı incelenmesi Andrew Wiles'ın Fermat'nın Son Teoremi'ni kanıtlaması ile sonuçlanmıştır.

Fermat'nın Son Teoremi'nin kanıtı tek başına her ne kadar önemli ise de, bu iddianın daha önemli olan yanı, matematiği 350 yıl boyunca ileri iten niteliğidir. Cebirsel Sayılar Kuramı ve Cebirsel Geometri çalışmalarının ardındaki en derin amaçlardan biri, bu iddiayı kanıtlamak olmuş, böylece bu iddia matematiğin bu dallarını da bir yandan bugünkü haline getirmiştir.

Wiles'ın kanıtı modern cebirin üç ana dalını da kuvvetle kullanır:

- Cebirsel Sayılar Kuramı,
- Cebirsel Geometri,
- Temsil Kuramı.

## 2 Tekillik Nedir ?

Tekillik Kuramı, deyim yerindeyse nesnelerin bozulduğu durumlardaki özelliklerini inceler. Burada nesnelerin bozulmasından kastedilen, bizce önemli görülen bir takım özelliklerin kaybolmasıdır. Bu özellik, bir denklem için sonlu çözümlere sahip olmak, bir yüzey içinse her noktasında türevlenebilir olmak olabilir.

Tekillik sözcüğü, matematikte farklı dallarda farklı tanımlarla kullanılsa da, özünde tekillik kavramının ardındaki temel düşünce budur. Sözlük anlamı ile, tekil sık sık değil, seyrek karşılaşılan durumları anlatır.

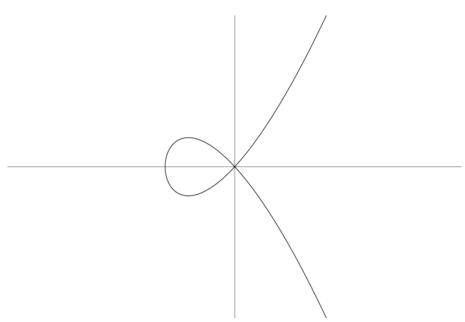
Tekillikler en basit bir cebirsel denklemden ($yx = 1$), çok daha karmaşık sistemlere (evrenin büyük ölçekteki yapısını betimleyen Genel Görelilik Kuramı gibi) her konuda karşımıza çıkarlar.

Cebirsel bir denklemin çözümünün tekil olması demek, söz konusu denklemin çözümlerinin sonlu kalmaması demektir. Örneğin, $yx = 1$ denkleminde $x$ değişkeni sıfıra giderken, $y$ değişkeni sonlu kalacak şekilde denklemi çözmek mümkün değildir. Bu nedenle bu denklemin $x = 0$ civarında bir tekilliği olduğu söylenir.

Tekillikler, uygulamalı matematikte karşımıza türevli denklemlerin sonlu çözümleri olmaması, örn. şok dalgaları vb., şeklinde çıkar.

Benzer bir durumsa, kozmolojide Einstein Alan Denklemi için ortaya çıkar. Einstein Alan denklemi bize evrende maddenin nasıl dağıldığını anlatan türevli bir denklemdir. Bu denklemin tekillikler içeren bir çözümüne ise karadelik diyoruz. Karadelik kuramsal bir olasılıktır, ancak evrende başka hiçbir fiziki kuramla tanımlanamayan ve "karadelik adayları" ismi verilen cisimler gözlenlenmiştir. Bu cisimlerin varlığı, kuramın geçerliliğine önemli bir destek sağlamaktadır.

Tekilliklere Cebirsel Geometri'den bir örnek vermek gerekirse, belki de en kolayı bir şekil çizmek olacaktır:



$$y^2 = x^3 + x^2.$$

Bu eğriye bakarak, $(0,0)$ noktasının eğrinin tüm diğer noktalarından farklı olduğunu görebiliriz. Tüm diğer noktalardan eğrinin tek bir kolu geçerken, $(0,0)$ noktasından eğrinin iki farkl kolunun geçtiğini görürüz. Bu gözlem, bize $(0,0)$ noktasının eğrinin tüm diğer noktalarından farklı, özel, diğer bir deyişle tekil bir nokta olduğunu gösterir.

## 3 Cahit Arf ve Patrick Duval

Cahit Arf'ın bugün Arf Halkaları adı ile anılan çalışması yukarıdakine benzer eğrilerin üzerindeki tekilliklerin cebirsel yönden incelenmesi ile ilgilidir.

Yukarıda gördüğümüz eğrinin tekil noktası cebirsel geometrinin en çok çalışılmış konularındandır. Hatta bu tarz tekillikleri yüzeyler durumunda sınıflayan (1934) Patrick Duval de 1941-1949 yılları arasında İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü'nde çalışmıştır. Bugün bu yüzey tekillikleri Duval tekillikleri adı ile de anılırlar.

Patrick Duval, Türkiye'de bulunduğu sırada Arf Halkaları konusunda da yayınlar yapmış, aynı zamanda bir de İstanbul Üniversitesi yayınları arasından çıkmış Analitik Geometri başlıklı Türkçe bir kitabı da kaleme almıştır.