Le condizioni (3.2), (3.6) caratterizzano le applicazioni f il cui differenziale è un'applicazione armonica per i rispettivi fibrati tangenti. In particolare

PROPOSIZIONE 4. – *Ogni applicazione armonica tra varietà piatte si prolunga in un'applicazione armonica tra i relativi fibrati tangenti.*

Per un'applicazione armonica f di M in N sussiste la notevole relazione (cfr. [3], [6]):

$$(3.7)\qquad \Delta e(f) = |D\,df|^2 + \langle df(\varrho^M(e_i)), dfe_i\rangle - \langle R^N(dfe_i, dfe_j)\,dfe_i, dfe_j\rangle$$

ove $\langle\ ,\ \rangle$ è il prodotto scalare su N ed $e(f) = \frac{1}{2}|df|^2$ è la *densità d'energia* di f; è inoltre noto (cfr. ad es. [1]) che un'applicazione totalmente geodetica ha densità d'energia costante.

Dalle (3.6), (3.7) segue che, se il differenziale dell'applicazione armonica f è pure armonico, deve essere

$$(3.8)\qquad \Delta e(f) = |D\,df|^2$$

da cui, tenendo presente anche la (3.2), si ottiene

PROPOSIZIONE 5. – *Le applicazioni armoniche $f: M \to N$ a densità d'energia armonica o più in particolare costante (quali le immersioni minimali isometriche e le submersioni riemanniane a fibre minimali) si prolungano in applicazioni armoniche tra i relativi fibrati tangenti se e solo se sono totalmente geodetiche.*

Inoltre, se M è compatta, le uniche applicazioni armoniche con differenziale armonico sono totalmente geodetiche e quindi con densità d'energia costante.

La precedente proposizione fornisce esempi significativi di applicazioni armoniche con differenziale armonico ovvero non armonico: appartiene ad esempio al 1° tipo l'immersione minimale di una ipersfera grande in S^n, al 2° tipo appartengono l'immersione minimale del toro di Clifford in S^3 e della superficie di Veronese in S^4 (cfr. ad es. [4]) ed anche le submersioni riemanniane per cui non è integrabile la distribuzione ortogonale alle fibre o con fibre non totalmente geodetiche (cfr. [3]).

Le Proposizioni 4, 5 potrebbero far pensare che le uniche applicazioni armoniche tra varietà non piatte i cui differenziali siano applicazioni armoniche per i relativi fibrati tangenti siano necessariamente totalmente geodetiche. Il seguente esempio mette in evidenza che la situazione è diversa.

Si ha pertanto

Proposizione 2. – *Condizione necessaria e sufficiente affinchè il differenziale F dell'applicazione f sia totalmente geodetico è che f sia totalmente geodetica.*

3. – Applicazioni con differenziale armonico.

Sia $\{e_i\}$ una base ortonormale su M e quindi $\{e_i^V, e_i^H\}$ una base ortonormale su TM rispetto alla metrica di Sasaki. Utilizzando le (2.8), (1.1), (2.7) si ottiene la seguente espressione per il campo di tensione $\tau(F)$ del differenziale di f:

$$\tag{3.1} \begin{aligned} \tau(F) &= \bar{D}_{e_i^V}\, dF(e_i^V) + \bar{D}_{e_i^H}\, dF(e_i^H) - dF(\tilde{\nabla}^{TM}_{e_i^V} e_i^V) - dF(\tilde{\nabla}^{TM}_{e_i^H} e_i^H) = \\ &= \{\tau(f) + R^N(D\,df(\dot{x}, e_i), df\dot{x})\, dfe_i\}^H + \{(\operatorname{div} D\,df)(\dot{x})\}^V . \end{aligned}$$

Si ha pertanto

Proposizione 3. – *Se f è un'applicazione armonica di M in N, il suo differenziale F è un'applicazione armonica tra i fibrati tangenti TM, TN con le relative metriche di Sasaki se e solo se sono soddisfatte le condizioni:*

$$\tag{3.2} R^N(D\,df(X, e_i), dfX)\, dfe_i = 0 , \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M) ,$$

$$\tag{3.3} \operatorname{div}(D\,df) = 0 .$$

Dalla (2.5) si ottiene, qualunque sia l'applicazione f:

$$\tag{3.4} \begin{aligned} D^2 df(e_i, e_i, X) - D^2 df(e_i, X, e_i) &= \\ &= (D_X(D\,df))(e_i, e_i) - (\operatorname{div} D\,df)(X) = \\ &= R^N(dfe_i, dfX)\, dfe_i - df(\varrho^M(X)) \end{aligned}$$

ove ϱ^M è il tensore di Ricci di M di tipo (1, 1), ed inoltre è

$$\tag{3.5} (D_X(D\,df))(e_i, e_i) = D_X(\operatorname{div} df) .$$

Pertanto, se f è armonica, dalle (3.4), (3.5) risulta che la (3.3) è equivalente a

$$\tag{3.6} R^N(dfe_i, dfX)\, dfe_i = df(\varrho^M(X)) .$$