DİL, MANTIK ve MATEMATİK: BİR ANLAMA ve ELEŞTİRİ DENEMESİ[1]

A. Çevik[2] ve Z. Ercan[3]

Bu yazı iki üstbölümden oluşmuştur. Birinci üstbölüm ikinci yazara ait olup toplam dört bölümden oluşmuş ve "Dil, Mantık ve Matematik: Bir Anlama Denemesi" olarak başlıklandırılmıştır. İkinci üstbölüm birinci yazara ait olup, birinci üstbölümde yazılanları "Bir Eleştiri Denemesi" başlığıyla eleştirmeyi amaçlamıştır.

Dil, Mantık ve Matematik: Bir Anlama Denemesi

Şöyle başlayalım: İnsanları diğer canlılardan farklı kılan temel ögelerden biri, soyutlama yapabilme yeteneğidir. Bu yetenek üzerinden canlılar farklı gruplara ayrılabilir. Bu açıdan bakıldığında gelmiş geçmiş en büyük keşiflerden biri tekerleğin icadı, ateşin bulunması ya da uzaya gidilmesi olmayabilir. En büyük icat, "simgeleme" olabilir. Buna göre gelmiş geçmiş en yaratıcı canlı (belki de dünyanın gidişatını değiştiren bir eşek) ilk resmi çizendir. Ama onu kimse tanımıyor!

Resimden bir sonraki en önemli icadın ne olduğunu sorgulamak da anlamlıdır. Bu icat "sonluluk" kavramının inşası olabilir. Bazılarına göre bu icat haklı olarak sonluluk değil de "sonsuzluk" kavramının inşası olarak görülebilir. Ama bunun biri olmadan diğeri olamaz, yani birinin inşa sürecinde diğeri de eş zamanlı inşa edilmiştir.

Bu satırların yazarına öyle geliyor ki insanoğlunun bu güne kadarki en kötü icadı da "para" ve "paranın saltanatı"dır. Yani, kavramsal olarak kapitalizmin ta kendisi. Kapitalizmi yenen icat belki de en önemli üçüncü icat olacaktır.

İnsanın yaşamını kolaylaştırmak adına icat ettikleri ve buldukları yukarıda sıraladıklarımızdan ibaret değil elbet. Ancak konumuz gereği ikisi üzerinde yoğunlaşmak istiyoruz: Matematik ve mantık. Peki, Matematik ve mantık arasındaki fark nedir? Matematik Dünyası dergisinin 104. sayısında [2]'de yer alan "Matematik Felsefesi: Mantıkçılık" başlıklı yazıda çağımızın önemli mantıkçı ve matematikçilerinden olan Russell'in şu açıklamasına yer veriliyor: *Matematik ve mantık, tarihsel olarak, birbirinden bağımsız disiplinler olarak ortaya çıkmıştır. Ancak ikisi de modern çağlarda gelişmiştir: Mantık daha matematiksel hale gelmiş ve matematik daha mantıksal hale gelmiştir. Sonuçta ikisini birbirinden ayırmak neredeyse imkansız hale gelmiştir; aslında ikisi de birdir... Bunun kanıtı tabii ki teknik detaydır.* Yani, Russell "ha mantık ha matematik, farkları yok" diyor.

Yazımızın bu paragrafı biraz kışkırtıcı olsun: Matematikte her sayı çok önemlidir. Öyle ki birini ihmal ettiğinizde sayı sistemi çöker. Sonrasında sayısız kalabilir ve dizlerinizi dövebilirsiniz. Matematikte sayı ne kadar önemliyse mantıkta da önerme o kadar önemlidir[4]. Mantıkta her önerme, "bu önerme işe yaramaz" diyemeyecek kadar önemlidir, hatta "ya hep beraber ya hiç birimiz" türündedir. "*Fatih Sultan Mehmet'in yaşamı sürecinde içtiği suyun toplamı 10 ton 250 kilo 26 gramdır*" da bir önerme ve dolayısıyla mantıkta önemli hem de çok önemlidir.

---

[1]Bilim ve Gelecek dergisinde yayına kabul edilen " Nedir bu modern matematik?" başlıklı makelede kullanılan mantık ve mantıksal çıkarımlar tartışılmamıştı. Bu yazı, kısmen de olsa bu boşluğu tamamlamayı amaçlamıştır. Yazının iyileştirilmesine yönelik katkı veren Nuran Ercan, Timur Karaçay ve Mehmet Terziler'e teşekkür ederiz.

[2]Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Felsefe Bölümü

[3]Abant İzzet Baysal Üniversitesi öğretim üyesi

[4]Mantık (ingilizce: logic) kelime olarak Yunanca'dan gelir ve anlamı "konuşma, konuşulan" demektir. Mantığın amacının tam olarak ne olduğu konusunda tam bir uzlaşma yoktur.

Yazıda tanımlanan mantık kavramı **önemli olan insanlıktır** deyiminin doğruluğuna ilişkin bir yanıt verebilme gücünde olmadığı gibi **önemli olan eşekliktir** deyimi yanında da durumu vahim, çaresiz ya da utangaçtır! "Ben bugüne kadar hep yaşadıysam yarın da yaşayacağım." ifadesinin neresi mantıksız olabilir? Bu tür sorgulamaların itici güçlerinden biri yoksa mantık kavramının "mekanikleşmesi" (her ne demekse) olabilir mi? Bir tuhaflık mı var? Yoksa mantıklı davranmak akıllıca bir davranış değil midir[5]?

DİL ve ALFABE

Her konuşma dili ve bu dile karşılık getirilen alfabenin estetiğine şapka çıkartmamak mümkün mü? Çok kolaylıkla kullandığımız dil ve alfabenin inşa süreci, insanlığın inşa süreci olarak da görülebilir.

1 Dil

Burada geçen *dil*, tat alma organı olan dil değildir. Kastedilen *dil*, anlama ve anlatma eyleminde kullanılan sistemin adıdır. Dıştan gelen verilerin zihinde yer alma (anlama) biçimine göre dışa giden bir karşılığı olabiliyor. Bu eylemler sürecinde kullanılan yöntemler canlılara göre değişse de ortak yöntem tepki alma ve verme biçimindedir. Anlama ve anlatma sürecinde kullanılan farklılıklar topluluğu dilin zenginliğini de belirler. İnsanlar için dışsal bilginin zihne gitmesi en az beş farklı organ üzerinden olabiliyor; burun, dil, göz, kulak ve deri. Bu organlar üzerinden zihne gelen verilere karşı verilen giden tepkiler, tek merkezden sevk ve idare edilmiş olsa da, aynı organlar üzerinden (en azından doğrudan) olmayabilir. Örneğin dil üzerinden gelen bir veriye verilen karşı tepki dil üzerinden verilemeyebilir. Acı biber yiyen birinin tepkisi yüz buruşturma biçiminde olabilir. Görsellik üzerinden alınan bir tehdit verisine karşın verilen karşı tepki, kaçma eylemi biçiminde olabildiği gibi, görsellik üzerinden gelen bir güzelliğe karşı verilen tepki dokunmak isteği biçiminde olabilir. Dıştan gelen bir müzik sesine verilen tepki dans biçiminde kendini gösterirken; yavrusunu kaybeden bir annenin dışa yansıyan tepkisi gözyaşları olabilir. Bu ve benzeri tepki alma-verme üzerinden oluşan davranış biçimlerine ***ilksel davranışlar*** diyebiliriz.

İlksel olmayan davranış biçimlerinden biri ***resim*** yapabilmektir[6]. Örneğin, görsellik üzerinden zihne gelen bir veriye, bir aslanın resmini çizerek, simgeleyerek dışa giden bir tepki olarak ortaya koymak müthiş bir keşif olmalı[7]. Bu, canlıları birbirinden ayırt eden özelliktir. Öyle ki canlıları resim yapabilen ve yapamayanlar olarak ikiye ayırabiliriz. Buna göre insanlar dışında resim yapabilen canlı yoksa canlılar insanlar ve insan olmayanlar olarak ikiye ayrılabilir.

Resim üzerinden oluşturulan dil, ilksel dilden tümüyle farklıdır. Dil kavramı ilksel ve resimsel olmak üzere ikiye ayırabilir. Resim kavramı yanlış algılamalar yaratabileceginden bunun yerine ***simge*** ya da ***sembol*** kullanmak daha anlaşılır olabilir. Bu yazının temel konusu simgeleme ve ona verilecek hareket üzerine olacaktır[8]. Ayrıca bazı simgelerin ***topluluğu***'nun

[5]Buna bir tartışma ortamında Ahmet Cihan'ın bir yorumu şöyle: Önermelerin doğruluk değeri vardır. Tüm felsefe ve bilim bu önermelerin doğruluk değerini bulmaya çalışır. Doğru olan önermeleri bulmaya çalışır. Eğer tüm önermelerin doğruluk değeri bilinirse bilim de biter felsefe de.

[6]Bilim ve Gelecek dergisinde yer alan bir habere göre, New England üniversitesinden arkeolog-yazar Dr. June Ross, elde edilen kaynaklara göre 39.000 yıl önce Endonezya'nın Sulawesi Kentinde bulunan ilk kaya resminin yapılmaya başlandığını anlatıyor. [7]. Bu durum bilinen en eski resminin Batı Avrupa'da olduğuna ilişkin bilgiyi tartışılır hale getiriyor.

[7]"Sen mutluluğun resmini çizebilir misin, Abidin?" sorusu her resmin kolaylıkla çizilemeyeceğini ifade eder.

[8]Yazıda *simge* kavramını tanımlamaya gerek duymuyoruz.

ne demek olduğunu da tanımlamaya gerek duymuyoruz. Bir x simgesinin bir A simgeler topluluğuna ait olma durumunu $x \in A$ ile gösteririz.

2 Sonlu Dizi

Bir, iki, üç sayılarını biliyoruz. Yüzbin, trilyon sayılarını da biliyoruz. Bize verilen her sayının bir fazlasını da, çok daha fazlasını da bilebiliriz. O kadar çok sayı biliyoruz ki, biri bize "şu sayıyı biliyor musun?" diye sorduğunda yanıtımız "evet" olacaktır. Bu kadar bilmişlik, bütün sayıları bildiğimizi söyler mi[9]?

Hepimiz $\mathbb{N}$ ile gösterilen ve doğal sayılar (kısaca sayı) kümesi olarak adlandırılan yapıyı bilmemize karşın elimizden geldiği kadar bilmemeye çalışacağız; cahillikten değil, temkinli olmak açısından. $\mathbb{N}$, sonsuz tane eleman içerdiğinden dolayı bu temkinlilikte haklıyız da. En azından topluluğu bir küme (ne demekse?) olarak bilmeyeceğiz[10]. Onun dışında bazı sayıların arasındaki bazı aritmetik işlemleri bilmemize karşın genel aritmetik işlemi bilmediğimizi varsayacağız. Çünkü bildiğimizi varsayarsak "*tavuk yumurtadan mı yoksa yumurta tavuktan mı çıktı?*" türü çıkmazlarla başbaşa kalabiliriz[11]. Buna karşın sıfırdan başlayarak istediğimiz kadar sayıyı bildiğimizi varsayacağız. Yani hiç bir kimseye "sen sadece şu kadara olan sayıları biliyorsun" demeyeceğiz. Okurun $|$ simgesini bildiğini ve bunlardan yan yana yazarak bildikleri sayıları temsil ettirebildiklerini varsayacağız. Örneğin,

$$1 := |,$$

$$2 := ||,$$

$$3 := |||.$$ [12]

Benzer biçimde, 4,5,...,2927 ve benzeri sayıları da sadece ve sadece $|$ simgesi kullanılarak tanımlanabilir[13]. Kısaca okur, bildiği her tam sayıyı belli çoklukta $|$ simgesini kullanarak tanımlayabilir. n bir doğal sayı olmak üzere A_n, $1, 2, ..., n$'den oluşan topluluğu göstersin. Bunu

$$A_n := \{1, 2, ..., n\}$$

olarak yazarız. Burada geçen 1,2,...,n doğal sayıların her biri A_n'nin bir elemanıdır.

Bir toplululuğun her elemanı başka bir toplululuğun elemanlarıyla eşleştirilebilir. A ve B iki topluluk ise, A'daki her elemanı B'de biricik elemana götüren eşleştirmeye ***fonksiyon*** diyoruz.[14]

Tanım 2.1. B, bir simgeler topluluğu ve n bir doğal sayı olsun. A_n'den B'ye tanımlı her fonksiyona **n-uzunluklu B-sonlu dizisi** denir. Bu durumda $f : A_n \to B$ yazarız.

---

[9] Söylemez. Ama sonlulukla sonsuzluk arasındaki geçişi söyler. Bazen buna potansiyel sonsuzluk denir.

[10] Aynı bu zamana kadar 10 metre yükseklikten yere doğru bırakılan demir parçasının yere düşmesinin bundan sonra bırakıldığında da gerçekleşeceğinin garanti olmaması gibi. Kimbilir, yarın yere doğru bırakılan bir demir parçasının bırakın yere düşmesi, belki göğe yükselmesi gibi!

[11] Olaki kalabilirsek lütfen anlayışla karşılayın. Ayrıca bu yaklaşım bazılarına göre gereksiz sorgulamadır ve bir değeri yok. Örneğin, bu soruya horozun yanıtının "ben işime bakarım." olduğu rivayet edilir.

[12] Burada := sembolü 'tanımlanma' anlamındadır. Yani $x := y$ demek "x, y olarak tanımlanır" demektir.

[13] Bu gösterim elbette anlamlıdır, aksi durumda 2927'yi göstermek için sadece $|$ simgesini kullanarak 30 sayfalık yere ihtiyacımız olabilir!

[14] Kümeler arasında tanımlı fonksiyon kavramı çok daha teknik olarak tanımlanır.

$f : A_n \to B$ sonlu dizisinde, her $i \in A_n$ için, i'ye karşılık gelen simge a_i'ye i'nin ***görüntüsü*** ($f(i) = a_i$ yazabiliriz.) denir. **B-sonlu dizisi**, bazı n'ler için n-uzunlukluklu B-dizidir. Bunu

$$f := a_1 a_2 ... a_n$$

olarak yazarız. A'nın değişik yapısına göre sonlu dizi farklı isimlerde verilebilir. Bir f sonlu dizisinin g sonlu dizisiyle gösterilmesini $g := f$ olarak belirtiriz.

Alıştırma 2.2. *B, bir simgeler topluluğu olmak üzere n-uzunluklu B-sonlu dizilerin farklı olmasını sezgisel olarak tanımlayın. Ayrıca, a ve b birbirlerinden farklı iki simge olmak üzere, B, a ve b simgelerinden oluşan topluluğu göstersin. ab ve ba B-sonlu dizilerinin birbirlerinden farklı ama ikisininde 2-uzunluklu B-sonlu dizi olduğunu gösterin.*

3 Alfabe

Sezgisel bir tanımlamayla, bir dildeki seslerin karşılığı olan sembollerin oluşturduğu harfler bütününe alfabe diyebiliriz [15] [16]. Ancak biz alfabeyi aşağıdaki gibi tanımlayacağız.

Tanım 3.1. Belirli sembollerin topluluğuna ***alfabe*** denir. Bir alfabeyi oluşturan her sembole ***harf*** denir.

Alfabenin bir harfinin kendi başına bir iş yapması ya da sosyalleşmesi kolay değildir. Sosyalleşebilmesi için kendisinden farklı olan harflerle etkileşim içerisinde olması beklenir. Bu beklenti sonucunda ortaya çıkan oluşuma sözcük diyeceğiz. Bu sözcüklerin bazısı "iyi" bazısı "kötü" olabilir diyerek sürükleyici olmaya çalışalım[17].

Tanım 3.2. $\mathcal{A}$ bir alfabe olsun.

i. $\mathcal{A}$'nın her harfi bir sözcüktür.

ii. p ve q iki sözcüğü gösteriyorsa pq de birer sözcüktür[18].

Her harfi bir sözcük olarak tanımlamak çoğu dilbilimcilere uygun gelmeyebilir. Ama böyle bir tanımlama yararlı ve konuyu toparlayıcı olacaktır.

$\mathcal{A}$ bir alfabe olsun. Okur $\mathcal{A}$'da tanımlanan her sözcüğün $\mathcal{A}$-sonlu dizi olduğunu görebilir. Bunun tersi de doğrudur, yani her $\mathcal{A}$-sonlu dizi bir sözcüktür. Bir $\mathcal{A}$ alfabesinden elde edilmiş sözcüklerin topluluğunu $\mathcal{A}(s)$ ile göstereceğiz.

Alıştırma 3.3. *p, q ve k üç sözcükse pqk tanımlı mıdır? Tanımlı değilse bunu sözcük yapacak "en iyi" tanımlama nasıl yapılabilir?*

[15] Alfabe, Yunanca Alfabesinin ilk iki harfi olan alfa (α) ve beta'dan (β) gelmektedir.

[16] Alfabenin Sümerlerce keşfedildiği bilinir. Buna göre alfabenin ilk kullanımı 5000 yıl öncesinde gider. Sümerlerce kullanılan alfabeye ***çivi yazısı*** denir. Bu alfabe Asur, Babil, Elam, Akad, Hititler tarafından kullanılmıştır. Çivi yazısını Mısır'da hiyeroglifler olarak adlandırılan yazı takip etmiştir. Bunun yanında Ege adalı kökenli olan ***linear*** ve Maya Uygarlığı kökenli Güney Amerika alfabeleri vardır. Arapların, Yunanların, İbranilerin ve Latinlerin alfabeleri Milattan 1050 yıl öncelere dayanan ***Fenike alfabesi*** olarak bilinen alfabeden türetilmiştir. Fenike alfabesi ise Mısır alfabesinden esinlenerek üretilmiştir.

[17] Burada yer alan "iyi" ve "kötü"" kelimeleri bir olumluluk-ya da olumsuzluk yargısı oluşturmuyor.

[18] Çin alfabesi yukarıdan aşağıya yazıldığından, bu tanımlamaya göre Çin alfabesinden üretilen hiç bir sözcük olmadığı anlamı çıkartılmamalı.

Alıştırma 3.4. $\mathcal{A}$ alfabesi sadece ve sadece a sembolünden oluşsun. $\mathcal{A}$'da 1-uzunluklu bir sözcük vardır. 2-uzunluklu da bir sözcük vardır. Verilen her n doğal sayısı için $\mathcal{A}$'da tek bir tane n-uzunluklu sözcük mü vardır?

$\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ iki alfabe olsun. f, $\mathcal{A}(s)$'den $\mathcal{B}(s)$'ye bir fonksiyon olsun. $f(a) = f(b)$ olduğunda $a = b$ oluyorsa f'ye ***birebir fonksiyon*** diyelim. $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ en az iki elemanlı sonlu alfabe ise $\mathcal{A}(s)$'den $\mathcal{B}(s)$'ye tanımlı birebir fonksiyon olduğunu gösterin.

4 Türk Abece'si

Her uygarlığın kullandığı konuşma dili üzerinden, birbirlerinden esinlenerek geliştirdiği bir alfabe vardır; Türkçe, Çince, Almanca gibi. Bu alfabeler nice aşklara, ihanet ve acıların anlatımlarına aracı olmuşlardır. Acıyı da, mutluluğu da, küfürü de dillendirmişlerdir. Hiç susmamışlardır.

Bunun yanında insanlığın ortak olarak geliştirdiği mantık alfabesi olarak bilinen bir başka alfabe vardır. Mantık alfabesi çok daha formaldir ve "ağır, oturaklı" ve biraz da "kibirli"dir. Bu alfabenin anlatılabilmesi için formalizme ihtiyaç vardır. Bu formalizm okura "yabancı" gelebilir. Bu yabancılığı az da olsa ortadan kaldırmak için önce Türk abece'sine bir gözatalım.

Bu yazıyı Türkçe yazdığımıza göre okurun Türk abece'sini ve Türkçeyi bildiğini varsayıyoruz. Türk Abece'sini kısaca TA ile göstereceğiz[19]. Okurun noktalama işaretlerinin neler olduğunu bildiğini de varsayacağız. TA, aşağıda verilen virgül dışındaki

a,b,c,ç,d,e,f,g,ğ,h,ı,i,j,k,l,m,n,o,ö,p,r,s,ş,t,u,ü,v,y,z

simgelerden oluşur. TA'daki harflerin sayısı 29 dur. Bu harfleri "{" ve "}" simgleriyle çevreleyerek, TA'ya ev yapalım ve bu evi,

{a,b,c,ç,d,e,f,g,ğ,h,ı,i,j,k,l,m,n,o,p,r,s,ş,t,u,ü,v,y,z}

ile gösterelim. Bu alfabeyi oluşturan her bir simgeye bir harf demiştik[20].

Bir meyva olan "armut" nasıl ifade edilebilir? Bu kime anlatılmak istendiğine bağlı olarak değişebilir; bazen armutun resmi çizilebilir, bazen de a, r, m, u ve t harflerini soldan sağa doğru yanyana yazarak anlatılabilir. Ancak görme engelli bir insana armutun resmini çizerek anlatmak zor olabilir. TA'deki harflerin yanyana getirilmesi TA'yı bilmeyen bir Çinliye de bir şey ifade etmeyebilir. TA'nın bazı harflerini gerekirse tekrarlayarak ve yanyana getirecek olursak, örneğin, "aaaaaaaaaaa" yazabiliriz. Benzer biçimde farklı harflerin, örneğin, a, b ve d harflerini bazen tekrarlarla kullanarak "abbbbaadaaa" yazabiliriz. a, r, m, u ve t harflerini kullanarak, "amtru" ve "armut" yazabiliriz. Bu yazımlardan ilk üçü "anlamsız" iken, dördüncüsü "anlamıdır". İlk üçüne anlamsız dememizin nedeni, bunların bir şeyi temsil etmemesidir[21]. Dördüncüsünün anlamlı olması ise bir meyvanın adı olmasındandır. Demek ki TA'da anlamsız sözcükler de üretilebiliyor, bu da doğal; "dikensiz gül bahçesi olmaz." Bunun yanında biraz anlamlı biraz anlamsız *aaaahhhhhhhhhhhh* ve *ooohhhh* gibi şeyler de üretilebilir. Bunun anlamı ortamdan ortama değişebilir. Ama fox gibi birşey üretemeyiz (Neden?).

[19] Türk harfleri, Latin harfleri temel alınarak, 1 Kasım 1928 gün ve 1353 sayılı yasayla tespit ve kabul edilen alfabedir. Kökeni Orhun alfabesine gider (M.Önce 200-150.)

[20] ", "{" ve "}" simgeleri alfabede değillerdir. Bunlar, harfler toplluluğunu gösterirken kullandığımız bir nevi yardımcı simgelerdir. Okurun ne denilmek istenildiğini bildiğini varsayıyoruz.

[21] Nuran Ercan'dan: "aaaaaaaaaaa" Amerika'da birileri protesto edilirken polisler tarafından protestoda kullanılan ifadeleri bastırmak için kullanılmıştı. Belki de birilerine ait olan çok önemli olumsuz sıfatların çevrede duyulmasını engellemekte önemli bir rol oynamıştı!...

TA'da "aliankaradangelecek" bir sözcük olmasına karşın "ali ankaradan gelecek" bir sözcük değildir. Ancak TA'da <> gibi bir harf içerseydi, "ali<>ankaradan<>gelecek" bir sözcük olacaktı. <>, TA'nın bir harfi olarak ele alalım ama yazarken boşluk bırakalım. Yani, "ali<>veli<>hasan" yerine "ali veli hasan" yazalım. Bu durumda "ali ankaradan gelecek" bir sözcük olacaktır. Arasında boşluk karakteri bulunduran sözcüklere aslında *cümle* demek gerekiyor ancak biz hepsine *sözcük* diyeceğiz.

Yukarıda yapılan gözlem ve benzer nedenlerden dolayı noktalama işaretleri olarak adlandırılan sembollerin de TA'nın birer harfi olduğunu varsayalım. Böylece her ne kadar girişte TA'nın 29 simgeden oluştğunu söylemiş olsak da bazı gereksinimlerden dolayı boşluk simgesini ve noktalama işaretlerini de TA'nın birer harfi olarak ele alalım. TA'daki bütün sözcüklerin topluluğunu TA(s) ile göstereğiz. Günlük yaşamda kullanılan anlamıyla bakacak olursak sözcükler,

i. anlamlı olabilir.

ii. anlamsız olabilir.

iii. biraz anlamlı biraz anlamsız olabilir.

iv. anlamlı soru olabilir.

v. anlamsız soru olabilir.

vi. "doğru" değerli olabilir.

vii. "yanlış" değerli olabilir.

viii. "doğru" ya da "yanlış" ama hangisi olduğu bilinemez olabilir.

Doğru ya da yanlış değeri olan sözcüklerin var olması mantıksal önerme olarak adlandıracak yeni bir kavramın yolunu açabilecektir.

"Yazı Dilinin Zenginliği" gibi bir kavram sıklıkla kullanılır. TA'yı ilk başta tanımladığımız haliyle ele alalım, yani 29 harften oluşun. Harf sayısı daha az olan bir alfabeden üretilen sözcük topluluğuyla TA(s) arasında birebir bir ilişki kurulabilir mi? Yani daha az harf bulunduran bir alfabedeki her sözcük TA'da tek bir sözcüge karşık gelsin ve tersine TA'daki her sözcük yeni alfabeden üretilen sözcüğe karşılık gelsin. Bunu bir problem olarak verelim.

Alıştırma 4.1. $\mathcal{A} = \{*, |\}$ ve $\mathcal{B}$ birden fazla elemanları olan sonlu alfabe olsun. $\mathcal{A}(s)$'dan $\mathcal{B}(s)$'ye tanımlı birebir fonksiyonun olduğunu gösterin. Ayrıca $TA(s)$'deki her elemanı $\mathcal{A}(s)$'de sadece ve sadece bir elemanla eşleyebilecek bir fonksiyonun olduğunu gösterin.

5 Mantık Alfabesi

Alfabeyi ve bir alfabenin sözcüğünü tanımlamıştık. Alfabe kavramına ilişkin Türk abece'sini az da olsa formalize etmeye çalıştık. Şimdi mantıkça olarak adlandıracağımız bir alfabe tanımlayacağız.

Mantık alfabesini tanımlarken, bazı kolaylıklar açısından p_n'lerin her biri mantık alfabesinin birer simgesi olacaktır. Mantık alfabesi,

p_n: ***temel önerme*** (n bir pozitif tamsayı),

$\rightarrow$: ***ise/gerektirir***,

$\neg$: ***değil***,

(: ***açan ayraç***,

): ***kapatan ayraç***

olarak adlandırılan simgelerden oluşacaktır.

Tanım 5.1. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere elemanları sadece ve sadece ,

$$\rightarrow,\ \neg,\ (,\ ),\ p_n$$

simgelerinden oluşan alfabeye **mantık alfabesi** denir[22]. Yani, mantık alfabesi,

$$\{\rightarrow, \neg, (,), p_1, p_2 \ldots\}$$

olur. Mantık alfabesini $\mathcal{M}$ ile göstereceğiz. $\mathcal{M}$'nin herbir p_n elemanına mantıkcanın bir değişkeni denilebilir. Fakat bu değişkenlere birer temel önerme denilme ihtiyaccı, önermeler kısmında kendini gösterecektir.

Mantık alfabesinde n ve m birbirlerinden farklı olduğunda p_n ve p_m'nin birbirlerinden farklı olduklarını varsayıyoruz. Dolayısıyla mantık alfabesi sonlu değildir. Mantık alfabesinde her p_n, p ve $|$ simgeleriyle temsil edilebilececeğinden, mantık alfabesinde üretilen her sözcük, sadece ve sadece $\rightarrow$, $\neg$, (,), p ve $|$ simgelerinin kullanımıyla da üretilebilir. Tersi de doğrudur. Dolayısıyla mantık alfabesini $\{\rightarrow, \neg, (,), p, |\}$ olarak da alabiliriz. Bu durumda mantık alfabesini sonlu alabileceğimiz ve bunun bir avantaj olduğu düşünülebilir. Ancak bu yaklaşımın, bu kadar da mütevazi sınırlamanın pratiksel bir karşılığı yoktur. p_n'yi n ile göstermenin kullanım kolaylığı sağlayıp sağlayamacağı da sorgulayabilir. Yerinde bir sorgulama olmakla birlikte, bu doğal sayılar kullanımı esnasında karışıklık yaratabilir ve amaçsal olarak kullanım kolaylığı sağlamayacakır.

Alıştırma 5.2. Mantık alfabesi tanımında temel önermeleri sonsuz tane yerine tek bir tane alınmasının avantaj ve dezavantajını şu an için düşünün. Mantık alfabesini ileride verilen uygulamasını gördükten sonra tekrar düşünün.

Okurun aşağıdaki sorular üzerine düşünmesi yazının daha kolay anlaşılmasını sağlayacaktır.

i. Mantık nedir[23]?

ii. Mantıklı olmak ne demektir?

iii. Bir balinanın intahar etmesi mantıklı mıdır?

iv. Mantık alfabesinin seçimi mantıklı mıdır?

Bu sorular uzatılabilir; "insan olmak mantıklı mıdır?" diye de sorulabilir.

Mantık alfabesinde her simgenin bir sözcük olduğunu hatırlayalım. Bunun yanında aşağıdakilerin her biri mantık alfabesinde birer sözcüktür.

[22], simgesi mantık alfabenin bir simgesi değildir.

[23]Mantık, akıl yürüterek bilginin yapısını inceleyen kavram olarak tanımlanabilir.

$\rightarrow\rightarrow p_1 \neg p_3.$

$(\neg p_1) \rightarrow ().$

$p_1 \rightarrow p_7.$

$\neg p_2 \rightarrow p_1.$

$\neg(p_2 \rightarrow p_1).$

Mantık alfabesinin hiç bir sözcüğü, günlük yaşamda kullandığımız hiçbir şeyi karşılamıyor! Örneğin, bu alfabede "armut" sözcügünün karşılığı yok. O halde bu alfabe ne işe yarar? Durup duruken bu mantık alfabesi neden tanımlandı? Onu ilginç yapan nedir? Bu sorular doğaldır. Mevcut haliyle bu alfabenin gerçekten bir yararı yok. Ancak bu alfabenin bazı sözcüklerine katacağımız değerlerle bu alfabe değerleşecek.

Türk abece'de bazı sözcüklere önerme dendiğini mantık dersini alan herkes bilir. Bunu takip ederek mantık alfebesinde de önerme kavramını tanımlayabileceğiz. Mantık alfabesinin değerlerinden biri, onun önermelerinden gelen değerden olacaktır. Bu değerler bizi "mantıklı" belki de "mantıksız" yapabilecektır. Türk abece'de sözcüklere ikiden fazla anlam yüklenebilişti (anlamlı, anlamsız, biraz anlamlı gibi). Mantık alfabesinde üretilen sözcüklerde bu esneklik olmayacaktır; her sözcük ya bir "önerme" ya da "önerme değildir" olacaktır.

6 Önerme Denemesi

Türk alfabesinde verilen bir sözcük yaşamın akışında doğru ya da yanlış olabilir. Buna karşın ne doğru ne de yanlış da olabilir. Bazen de doğru ya da yanlış olup olmadığını bilemeyebiliriz. Doğruluğu çok "bariz" olsa da bu durumu kanıtlayamayabiliriz. Bütün bu süreçlerde karşımıza bir sürü tanımsızlıklar ve belirsizlikler çıkabilir. Örneğin, "*Fatih Sultan Mehmet patates yemiş olsaydı patatesi sevdiğini anlardı*" sözcüğü doğru ya da yanlış değer alacak nitelikte olmasına karşın aynı zamanda "saçma sapan" bir sözcüktür. Ama ne demektir saçma sapan? Görüldüğü gibi işin içinden sıyrılmak kolay değil. Daha kolay örnekler üzerinden de problemler çıkabilir. Örneğin, "Uzaya giden ilk insanın adı Yuri Gagarin'dir." sözcüğü "doğru", "Fatih Sultan Mehmet Amerika'ya gitmemiştir." sözcüğü "yanlış" olmasına karşın bunların kanıtlanması-zor demeyelim ama-başlı başına bir iştir.

Bütün canlılar doğmuştur.

Bütün canlılar ölümlüdür.

1925 yılında Türkiye'de yetişen ve ağırlığı 5 kilo olan karpuzların sayısı 8216 dır.

Fatih Sultan Mehmet'in yaşamı sürecinde içtiği suyun toplamı 10 ton 250 kilo 26 gramdır.

Türkiye'de her akşam güneş batar.

Balinaların intihar etmesi mantıklıdır.

Balinaların yaşaması mantıksızdır.

Bu sözcüklerin herbiri doğru ya da yanlıştır. Ama kanımca dünyanın en dahi insanları bir araya gelse bile bunların doğru mu yoksa yanlış mı olduklarını kanıtlayamazlar! Gerçekten de "*Bütün canlılar ölümlüdür.*" sözcüğünün doğru ya da yanlış olmasını kim kanıtlayabilir? Kısacası başımıza bir sürü tuhaf şeyler çıkabilir. Peki bu çıkmazdan kurtulmanın bir çözümü ne olabilir? Bu gözlemler ve sorular bizi formalizme yönlendirir.

7 Önerme

Türk abece'de bir sözcük doğru ya da yanlış değer alıyorsa o sözcüğe önerme denir demeye çalıştık. Bu konuda kısmen başarılı olsak da ortaya konan bazı örnekler "Yedi Başlı Ejderha" gibiydi. Bu durumdan kurtulmak için adam gibi bir önerme tanımını aşağıdaki gibi verebiliriz.

Tanım 7.1. Mantık alfabesinin bir sözcüğünün ***önerme*** olduğunu aşağıdakiler belirler.

i. Her temel önerme bir önermedir.

ii. p, bir önermeyi gösteriyorsa $(\neg p)$ bir önermedir.

iii. p ve q iki önermeyi gösteriyorsa $(p \to q)$ bir önermedir.

Mantık alfabesini, Türkçe alfabesinden farklı kılan bir unsur, mantık alfabesinde temel önermenin tanımlanmasıdır. Önermelerin inşasında kullanılan $\{\neg, \to\}$ ikilileri yerine $\{\neg, \wedge\}$ ya da $\{\neg, \wedge\}$ ikilileri de kullanılabilir. $\{\neg, \to\}$ ikililerinin tercih edilmesi bu mantığın aksiyomlarının-en kullanışlı olan-Hilebert tarzı yazılmasına yöneliktir[24].

Alıştırma 7.2. p, q ve r, birer önermeyi göstermek üzere aşağıdakilerin önerme olduğunu gösterin.

i. $(\neg(\neg p))$

ii. $(p \to p)$.

iii. $((p \to q) \to r))$.

iv. $(p \to (q \to r))$.

Alıştırma 7.3. p, q ve r, birer önermeyi göstermek üzere aşağıdakilerin önerme olmadığını gösterin.

i. $()$

ii. $(p \to \neg)$.

iii. $p \to q \to r$.

$\mathcal{M}$, mantık alfabesi olmak üzere her önerme bazı n'ler için n uzunluklu bir $\mathcal{M}$-sonlu dizidir. Burada geçen n'ye o önermenin ***uzunluğu*** denir[25].

Alıştırma 7.4. p, bir önermeyi göstersin. p'nin uzunluğunun 1 olması için gerekli ve yeterli koşulun, p'nin bir temel önerme olduğunu gösterin.

[24] Mehmet Terziler'e teşekkürler.

[25] Bir önermenin uzunluğunu tanımlamanın ne işe yarayabileceği okurun derdi olmalıdır.

Alıştırma 7.5. i. $\neg p_1$ sözcüğünün bir önerme olmadığını gösterin.

ii. Uzunluğu 2 ya da 3 olan önermenin olmadığını gösterin.

Alıştırma 7.6. p bir önermeyi göstersin.

i. p'nin uzunluğunun 4 olması için gerekli ve yeterli koşul, p'nin $(\neg p_i)$ biçiminde olmasıdır.

ii. p'nin uzunluğunun 5 olması için gerekli ve yeterli koşul, p'nin $(p_i \rightarrow p_j)$ biçiminde olmasıdır.

Her önermenin bir uzunluğu vardır ve tektir. Bu uzunluğu $u(p)$ ile gösterelim. Verilen ve p ile gösterilen bir önermenin "bir adımda" ürettiği önerme $(p \rightarrow p)$ ve $(\neg p)$ önermeleridir. $u((p \rightarrow p)) = u(p) + u(p) + 3$ ve $u((\neg p)) = u(p) + 3$ olması gerektiği, en azından sezgisel olarak doğrudur. Bu sezgiselliği ziyan etmeden tanıma dönüştürmek rahatlatıcı olacaktır.

Tanım 7.7. p ve q iki önermeyi göstersin.

i. $u((\neg p)) = u(p) + 3$,

ii. $u((p \rightarrow q)) = u(p) + u(q) + 3$,

olarak tanımlanır.

Alıştırma 7.8. p ve q iki önermeyi göstersin. $u((\neg p)) = 4$ olması için gerek ve yeter koşulun, p'nin bir temel önerme olduğunu gösterin. Benzer biçimde $u((p \rightarrow q)) = 5$ olması için gerek ve yeter koşulunu, p ve q'nin birer temel önermeyi göstermesi gerektiğini gösterin.

Önermelerin gösterimleriyle ilgili bir kaç kısaltmanın kolaylıkları olacaktır. p ve q iki önermeyi göstermek üzere:

i. $(\neg p) := \neg p$.

ii. $(p \rightarrow q) := p \rightarrow q$.

iii. $((\neg p) \rightarrow q) := p \vee q$.

iii. $(\neg((p \rightarrow (\neg q))) := p \wedge q$.

Bunların yanında, $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ önermesi $p \longleftrightarrow q$ ile gösterilir.

Alıştırma 7.9. Verilen bir p önermesi için $(\neg p)$ önermesini kısaca $\neg p$ gösterdiğimize göre bu kısaltılmış önermenin uzunluğu 2'mi oluyor?

Alıştırma 7.10. p ve q iki önermeyi göstersin. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösterin.

$$u(p \vee q) = u(p) + u(q) + 6 \text{ ve } u(p \wedge q) = u(p) + u(q) + 10$$

Kısaltmalarda geçen $\vee$, "veya", $\wedge$, "ve" ve $\longleftrightarrow$, "ancak ve ancak" olarak okunur. Önermelerin uzunluğu, kısaltılmışlıklarının uzunluğuyla belirlenmez. Örneğin, $p_i \rightarrow p_j$ önermesinin sözcük olarak uzunluğu 3 olmasına karşın önerme olarak uzunluğu 5 dir.

Önerme tanımlama denemesinde önermeye doğru ya da yanlış olarak adlandırılan değerler vererek anlamaya ve tanımlamaya çalıştık. Buna karşın formal olarak tanımladığımız önerme tanımında önermelere herhangi bir "değer" verilmedi. Değeri olmayan önerme ne işe yarayabilir ki? Önermelere değer vermeliyiz.

8 Önermenin Değeri

Türkçe alfabede "*Balinanın intihar etmesi mantıklıdır.*" sözcüğüne her kafadan bir yorum yapılması muhtemeldir. Kimisi böyle saçma sapan bir sözcük mü olur diyecektir, kimi doğru, kimi yanlış diyecektir, kimi duygularını işin içine katıp duygusal bir ortam yaratıp tepkisini ağlayarak gösterecektir. Kimisi ise böyle bir sözcük kurmuş olmam nedeniyle beni "kafayı sıyırmakla" itham edecktir. Benzer yaklaşım "*her kadın güzeldir.*" için de geçerli olacaktır. Halbuki benim aradığım masum bir yanıt, yanlış ya da doğru. Bu iki sözcüğe de Türkçe alfabesinde "alaylı[26]" tarzda bir önerme dendiğini de biliyoruz.

Türkçe alfabede var olan önermelerin doğru, yanlış ya da ikisi de olmama kargaşasından uzaklaşarak önerme alfabesinde bir önermenin doğru ya da yanış değerlerden sadece ve sadece birini aldığını varsayacağız, başka çare yok!

Şu ana kadar tanımlanmış olunan önermelerin bize vereceği herhangi bir şey yok. Ancak, biz önermelere bazı anlamlar yüklersek, bu yönlü tohum atarsak onun bir geri dönüşümü olacaktır. Ne demişler atalarımız: "Ne ekersen onu biçersin." Mantık alfabesinde ekeceğimiz "doğru" ve "yanlış" olarak adlandırılan anlamsız iki sözcük olacak. Kolaylık açısından yanlışı 0 ve doğruyu 1 ile gösterelim[27].

Alıştırma 8.1. Sizce önermelere yüklenecek olan "doğru" ve "yanlış" lardan hangisi daha kıymetlidir?

Tanım 8.2. P, önermeler alfabesindeki temel önermelerin topluluğu olmak üzere, P'den $\{0, 1\}$ kümesine tanımlı fonksiyona ***temel değer fonksiyonu*** denir[28].

Temel değer fonksiyonu, her temel önermeyi 0 ya da 1'e götürüyor olmasına karşın hangsine gotürdüğü belli değildir. Önermeler, temel önermelerle tanımlandığından, temel değer fonksiyonu yardımıyla temel olmayan önermelerin de bir değerinin olma beklentisine girebilir ki bu da son derece doğaldır. d_t bir temel değer fonksiyonu olsun. Eğer, $d_t(p_i) = 1$ ise yani, p_i'nin değeri 1 ise, $\neg p_i$ önermesinin değeri ne olmalıdır? Bu değerlendirmeyi yaparken p_i ile $\neg p_i$ arasıdaki ilişkiyi gözardı edemeyiz. $\neg p_i$, p_i'nin değili olduğundan, hayatın akışından fazla kopmamak için, $\neg p_i$'nin değrinin p_i'nin değerinin "tersi", yani 0 olması beklenir. O halde d, önermeler topluluğundan $\{0, 1\}$'e giden d_t'nin bir genişleme fonksiyonu ise

$$d(\neg p_i) := 1 - d(p_i) = 1 - d_t(p_i)$$

olması beklenir. Üstelik p bir önerme ise,

$$d(\neg p) := 1 - d(p)$$

olması beklenir. Benzer biçimde, hayatın akışından kopmamanın bedeli olarak p_i ve p_j önermelerinin değerleriyle $r := p_i \to p_j$ önermesinin değerleri arasındaki ilişki ne olamalıdır? p ve q gibi iki önerme verilsin. $p \to q$ önermesini r ile gösterelim. Biraz uğraşla q önermesinin değeri 1 ise, p'nin değerinden bağımsız olarak r önermesinin değeri 1 olur. q'nın değeri sıfırsa r'nin değerinin 1 olması için gerekli ve yeterli koşul p'nin değerinin sıfır olmasıdır. Bu söylediklerimizden şunları yazmak uygun olur:

$$d(p_i \to p_j) := 1 - d_t(p_i) + d_t(p_i)d_t(p_j) = 1 - d(p_i) + d(p_i)d(p_j).$$

[26]Mektepli olmayan.

[27]Okur, doğru ve yanlış arasında iyi-kötü gibi bir sınıflama yaparsa hata yapar. İkisinden biri olmazsa oyun çöker!

[28]Bu tanımda kullanılan fonksiyon kavramının ne olduğunu okurun bildiğini varsayıyoruz.

Daha genel olarak,

$$d(p \to q) := 1 - d(p) + d(p)d(p)$$

olması beklenir.

Tanım 8.3. d, önermeler topluluğundan $\{0, 1\}$'e giden ve verilen her p önermesi için aşağıdaki özellikte bir fonksiyonsa, d'ye ***değer fonksiyonu*** denir.

ii. $d(p) = 1$ ise $d(\neg p) = 0$.

iii. $d(p) = 0$ ve $d(q) = 0$ ise $d(p \to q) = 1$.

iv. $d(p) = 0$ ve $d(q) = 1$ ise $d(p \to q) = 1$

v. $d(p) = 1$ ve $d(q) = 0$ ise $d(p \to q) = 0$

v. $d(p) = 1$ ve $d(q) = 1$ ise $d(p \to q) = 1$

olarak tanımlanır.

Aşağıda verilen alıştırmalar ve benzerleri yaygın olarak bilinmesine karşın bazıları doğrudan [6]'dan alınmıştır. Benzerleri yine aynı kaynakta bulunabilir.

Alıştırma 8.4. d_t bir temel değer fonksiyonuysa, her p_i için $d(p_i) = d_t(p_i)$ özelliğini sağlayan bir değer fonksiyonu vardır. Bu fonksiyona d_t temel değer fonksiyonunun *genişlemesi* denir.

Alıştırma 8.5. d, bir değer fonksiyonu olsun. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösteriniz.

i. $d(\neg p) = 1 - d(p)$.

ii. $d(p \to q) = 1 - d(p) + d(p)d(q)$.

iii. $d(p \vee q) = d(p) + d(q) - d(p)d(q)$

iv. $d(p \wedge q) = d(p)d(q)$.

v. $d(p \longleftrightarrow q) = (1 - d(p) + d(p)d(q))(1 - d(q) + d(p)d(q))$.

Yukarıda verilen (ii)'den şunu söyleyebiliriz: "Yanlıştan yanlış edilmesi" doğrudur, yani yanlış adamın yanlış işler yapması, yerinde yani doğru bir sonuçtur. "Yanlıştan doğru edilmesi" doğrudur. Yani, $d(p) = 0$ ve $d(p \to q)$ her zaman 1 olur. Buna karşın "Doğrudan yanlış edilmesi" yanlıştır. Yani, $d(p) = 1$ ve $d(q) = 0$ ise $d(p \to q) = 0$ olur. "Doğrudan doğrunun edilmesi" de doğrudur.

Alıştırma 8.6. d, bir değer fonksiyonu verilsin. p ve q önermeleri için aşağıdakilerin denkliğini gösterin.

i. $d(p \to q) = 1$ olması için gerekli ve yeterli koşul $d(p) \leqslant d(q)$.

ii. $d(p \longleftrightarrow q) = 1$ olması için gerekli ve yeterli koşul $d(p) = d(q)$.

Alıştırma 8.7. d, bir değer fonksiyonu verilsin. p, q ve r önermeleri aşağıdaki özellikte olsunlar.

i. $d(p \to \neg q \wedge \neg r) = 1$.

ii. $d(q \vee r) = 1$

iii. $d(p \vee \neg q) = 1$

$d(p)$, $d(q)$ ve $d(r)$'in değerlerini bulunuz.

Alıştırma 8.8. Yargıcın elindeki bilgiler şunlar.

i. Ali suçsuz ise Bahri ve Cumali'nin ikisi de suçlu.

ii. Bahri ya da Cumali'den biri suçsuz.

iii. Ya Ali suçlu ya da Bahri suçlu.

Suçlu ve suçsuzları belirleyin.

Alıştırma 8.9. d, bir değer fonksiyonu verilsin. a, b ve b önermeleri şağıdaki özellikte olsunlar.

i. $d(a \to \neg b \vee \neg c) = 1.$

ii. $d(b \to \neg a) = 1$

iii. $d(c \to \neg a \wedge \neg b) = 1$

$d(a)$, $d(b)$ ve $d(c)$'in değerlerini bulunuz.

Alıştırma 8.10. Aşağıdaki verilerle doğrucu ve yalancıyı bulunuz.

i. Ateş doğrucuysa Bülent ya da Can'ın biri yalancıdır.

ii. Bülent doğrucuysa Ateş yalancıdır.

iii. Can doğrucuysa hem Ateş hem de Bülent yalancıdır.

Türk alfabesinden üretilen önerme olmayan sözcüklerin anlamları olabilir. Buna karşın mantık alfabesinde önerme olmayan sözcüklerin hiç bir kıymet-i harbiyesi yoktur.

9 Önermelerin Eşdeğerliliği

p önermesi verilsin. $q := p \vee p$ diyelim. Her değer fonksiyonu d için

$$d(p) = d(q)$$

olur. Bu durum, p ve q önermelerinin denk olmalarına bir örnektir. Genel tanım aşağıdadır.

Tanım 9.1. p ve q önermeleri her değer fonksiyonu d için

$$d(p) = d(q)$$

oluyorsa p ve q önermelerine ***denk*** denir ve $p \equiv q$ ile gösterilir.

Aşağıdaki gözlemler, p, q ve r önermeleri için kolaylıkla gösterilebilir.

i. $p \equiv p$.

ii. $p \equiv q$ ise $q \equiv p$.

iii. $p \equiv q$ ise $q \equiv r$ ise $p \equiv r$.

p önermesi verilsin. Her değer fonksiyonu d için $d(p) = 1$ ise p'ye ***mutlak doğru (totoloji)*** denir. Benzer biçimde her değer fonksiyonu d için $d(p) = 0$ ise p'ye ***mutlak yanlış (çelişki)*** denir. Örneğin klasik mantık kanunlarına göre her p önermesi için $p \vee \neg p$ mutlak doğru ve $p \wedge \neg p$ mutlak yanlıştır.

Tanım 9.2. Verilen p, q ve r önermeleri için aşağıdakilerin her birine ***mantıksal aksiyom*** denir.

i. $p \to (q \to p)$

ii. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to p) \to (p \to r))$.

iii. $(\neg p \to \neg r) \to (p \to r)$.

Alıştırma 9.3. Mantıksal aksiyomların mutlak doğru olduğunu gösterin.

Alıştırma 9.4. Mutlak doğru önermeyle mantıksal aksiyom arasındaki fark nedir? Mutlak doğru olan bir önerme mantıksal aksiyom olmak zorunda mıdır? Verilen bir p önermesi için $p \to p$ önermesi mutlak doğrudur. Bu önerme mantıksal aksiyom mudur?

Alıştırma 9.5. p ve q iki önermeyi gösterisin. $p \vee q$ ve $q \vee p$ önermelerinin denk olduklarını gösteriniz. Benzer biçimde $p \wedge q$ ve $q \wedge p$ önermelerinin denk olduğunu gösteriniz.

10 Γ-Teorem

Teorem kelimesi matematikle ilgilenen herkes tarafından az da olsa bilinen bir kavramdır. Buna karşın teoremin matematiksel tanımının ne olduğu pek bilinmez. Öncelikle Γ-teoremin tanımıyla başlayalım.

Tanım 10.1. Γ, bir önermeler topluluğu olsun. Γ-teoremler aşağıda belirtilen özelliklerlerle belirlenen bir önermeler topluluğudur.

i. Γ'nın her elemanı bir Γ-teoremdir.

ii. Her mutlak doğru önerme veya mantıksal aksiyom bir Γ-teoremdir.

iii. p ve $p \to q$ iki Γ-teorem ise q bir Γ-teoremdir.

p bir Γ-teorem ise $\Gamma \vdash p$ yazarız. Bu demektir ki p önermesi Γ'daki önermelerden kanıtlanır. Kanıttan kastımızın ne olduğunu biraz sonra açıklayacağız. (iii) koşuluna ***modus ponens kuralı*** denir. Bu tanımda verilen her önermenin bir Γ-teorem olup olmadığını bilemeyebiliriz. Ancak önermeyle birlikte verilen bazı koşullar altında bir önermenin Γ-teorem olduğunu söyleyebiliriz. Örneğin, Γ, mantıksal önermeler topluluğunu gösterdiğinde, mantıksal önerme olmayan bir önermenin Γ-teorem olduğunu söylemek kolay olmayacağı gibi hatta bu imkansız olabilir. Buna karşın Γ, bütün önermelerin topluluğu olmak üzere her önerme bir Γ-teoremdir. Bu durumda verilen her p önermesi için $\Gamma \vdash p$ ve $\Gamma \vdash \neg p$ olur ki, bu durum "hayatın doğal akışına" aykırıdır.

Γ, mantıksal aksiyomların topluluğu olsun. Verilen bir p önermesi için, $p \to p$ bir Γ-teoremdir. Bunu göstermek için aşağıdaki yol takip edilebilir:

$$(p \to ((p \to p) \to p)) \to ((p \to (p \to p)) \to (p \to p))$$

ve

$$(p \to ((p \to p) \to p))$$

önermeleri mantıksal aksiyomlar olduklarından Γ-teoremdirler. Bu önermelere modus ponens kuralı uygulanarak

$$((p \to (p \to p)) \to (p \to p))$$

önermesinin Γ-teorem olduğu görülür. Ayrıca buna

$$p \to (p \to p)$$

önermesinin Γ-teorem olması dikkate alınarak modus ponens kuralı uygulanarak, $p \to p$ önermesinin Γ-teorem olduğu elde edilir.

11 Γ-Kanıt

Terimleri önermeler olan sonlu diziye ***sonlu önermeler dizisi*** diyelim. Böyle bir dizinin uzunluğu dizide yer alan önermelerin sayısıdır. Örneğin, φ_1, φ_2,...,φ_n'ler önermeler olmak üzere $\varphi_1\varphi_2...\varphi_n$ önermeler dizisinin uzunluğu n olur.

Verilen bir Γ-teoremin belirli özelliği sağlayan önermeler dizisine, Γ-kanıt diyeceğiz. Her Γ-teoremin bir Γ-kanıtının var olmasına karşın bu kanıtın ne olduğunu açık açık yazabilmek bambaşka bir konudur.

Γ-kanıtın tanımını vererek başlayalım [29].

Tanım 11.1. Γ, bir önermeler topluluğu ve φ bir Γ-teorem olsun. φ_m, φ önermesi olmak üzere $\varphi_1\varphi_2...\varphi_m$ önermeler dizisinde her i için aşağıdaki özelliklerden birini sağlıyorsa, bu diziye φ'nin bir Γ-***kanıtı*** denir[30].

i. $\varphi_i \in \Gamma$.

ii. φ_i mantıksal aksiyom.

iii. φ_k önermesi $\varphi_j \to \varphi_i$ olacak biçimde $j, k < i$ var.

Bir Γ-kanıt (dizisi) tek olmak zorunda değildir. Örneğin, Γ mantıksal aksiyomlar topluluğu ve φ bir mantıksal aksiyomu göstersin. Verilen φ_1, φ_2,...,φ_m'ler bazı mantıksal aksiyomlar ve φ_m, φ önermesini göstermek üzere sonlu önermeler dizisi

$$\varphi_1\varphi_2...\varphi_m$$

[29]Her ne kadar Γ-teorem Γ-kanıttan önce verilmiş olsa da, çoğu zaman önce Γ-kanıt yapılıp, bir kanıtın son terimine Γ-teorem denir.

[30]Bu tanımın G. Frege ve D. Hilbert'e ait oluduğu düşünülmektedir.

bir Γ-kanıt olur. Buna karşın en ekonomik Γ-kanıt, dizi olarak sadece φ olur. Bir Γ-kanıtın tek bir tane olmama durumu bizleri "en kısa Γ-kanıt nedir?" sorusuna yönlendirir.

$\varphi_0 ... \varphi_n$ önermeler dizisi $\Gamma \vdash \varphi$'nın kanıt dizisiyse, bu kanıta ***n-uzunluklu Γ-kanıt*** denir. $\Gamma \vdash p$'nin kanıt dizilerinin uzunluklarının en kısasına ***temel kanıt uzunluğu*** denir. Bir kanıt dizisinin uzunluğu temel kanıt dizisinin uzunluğuna eşitse o kanıt dizisine ***en kısa kanıt*** denir. En kısa kanıt da tek bir tane olmak zorunda değildir[31].

örnek 11.2. Γ, temel önermelerin bir topluluğu ve p önermesi verilsin.

$$q_1 := (p \to ((p \to p) \to p)) \to ((p \to (p \to p)) \to (p \to p))$$

$$q_2 := p \to ((p \to p) \to p)$$

$$q_3 := (p \to ((p \to p)) \to (p \to p)$$

$$q_4 := p \to (p \to p)$$

$$q_5 := p \to p$$

olmak üzere $q_1 q_2 q_3 q_4 q_5$ dizisi $\Gamma \vdash p \to p$'nin kanıtıdır.

Alıştırma 11.3. p bir önerme olsun.

i. $\Gamma = \{p\}$ olsun. p'nin Γ-teorem ve bunun temel kanıt uzunluğunun 1 olduğunu gösterin.

ii. Γ, önermesel aksiyomlar topluluğu olsun. $p \to p$'nin bir Γ-teorem olduğunu biliyoruz. Bunun temel kanıt uzunluğu 1 olmak zorunda mıdır?

Alıştırma 11.4. Her Γ-teoremin sonsuz çoklukta Γ-kanıtının olduğunu gösterin.

Γ bir önermeler topluluğu ve φ bir önerme olsun. Aşağıdakiler denktir.

i. $\Gamma \vdash \varphi$.

ii. $\varphi_m = \varphi$ olmak üzere φ_1, φ_2,...,φ_m önermeleri vardır ve her i için aşağıdakilerden biri sağlanır.

   a. φ_i mantıksal aksiyomdur.

   b. φ_k, $\varphi_j \to \varphi_j$ olacak biçimde j,$k < i$ var.

MATEMATİKÇE

Matematikçenin alfabesiyle başlayacağız. Mantıkçada yer alan temel önerme, önerme, mantıksal önerme, Γ-kanıt ve Γ-teorem gibi kavramların matematikçede karşılığı olacak. Örneğin, temel önermenin karşılığı atomik formül, önermenin karşılığı formül, mantıksal aksiyomun karşılığı matematik-önermesel aksiyom olacak. Mantık alfabesi üzerinden elde edilen yöntemler matematikçe alfabesinde elde edilen bu kavramlara birebir uygulanacak.

[31] Kanıt uzunluğuyla ilgili detaylaı bir bölüm, *Lenght of proof* başlığıyla P. Pudlak'a aittir.

12 Matematikçenin Alfabesi

Mantık alfabesinde her temel önerme p_i'yi değişkenler olarak adlandıracağımız v_i'lerle değiştirerek ve

$$\forall,\ \exists,\ \in,\ =$$

sembollerini ekleyerek elde edilen alfabeye matematikçe alfabesi diyeceğiz. Yani aşağıdaki gibi resmi olarak tanımlayacağız.

Tanım 12.1. Simgeleri sadece ve sadece

$$\neg,\ \rightarrow,\ \forall,\ \exists,\ =,\ \in,\ (,),v_1,\ v_2,...$$

simgelerinden oluşan alfabeye ***Matematikçe alfabesi*** denir[32]

Bu alfabede v_i değişkenleri "yeterince" çok olacak. Bunlar bazen x, y, z gibi simgelerle de gösterilebilir. Matematikçenin alfabesinde yer alan $\rightarrow$ ve $\neg$ simgeleri mantık alfabesinde yer alan simgelerdir. Diğer simgeler aşağıdaki gibi okunur.

i. $=$: eşittir,

ii. $\exists$: vardır,

iii. $\forall$: her,

iv. $\in$: elemanıdır.

Dikkat edilirse matematik alfabesinde hiç önerme yok. Hatta temel önerme de yok. Ama sorun değil, matemaikçe alfabesinin bazı sonlu uzunluklarına temel onerme yerine geçebilecek atomik formül tanımlayabileceğiz.

Tanım 12.2. Her v_i ve v_j için aşağıdakilerin her birine ***atomik förmül*** denir.

i. $v_i = v_j$.

ii. $v_i \in v_j$.

Mantık alfabesinde temel önermeler kullanılarak önermeler tanımlanmıştı. Buna benzer biçimde atomik formüller kullanarak formüller tanımlayabiliriz.

Tanım 12.3. Matematikçede bir ***formül*** aşağıdaki gibi belirlenir.

i. Her atomik formül bir formüldür.

ii. Eğer φ bir formül ise, $\neg\varphi$ bir formüldür.

iii. Eğer φ ve ψ birer formül ise, $\varphi \rightarrow \psi$ bir formüldür.

iv. Eğer φ bir formülse ve v_i bir değisken ise, $\exists v_i \varphi$ bir formüldür.

Önermeler alfabesindeki bazı sonlu diziler için yapılan kısaltmalar matematik alfabesinde yer alan sonlu diziler içinde geçerlidir. Ayrıca

$$\neg\exists v_i\varphi \text{ yerine } \forall v_i \neg\varphi$$

yazılır. Bu iki formül birbirine mantıksal olarak eşdeğerdir.

[32] Matematikçe bir dildir. Her dil kendi içerisinde "küfür" barındırabilir. Bu konuda dikkat çekici yazılardan biri [8] de bulunabilir.

13 Matematikte mantıksal aksiyomlar

Mantıkçada yer alan önermesel aksiyomların karşılığı olarak görülebilecek yapıyı matematikçede de tanımlayabileceğiz. Bu önermesel aksiyomlar "mutlak doğru" olacak. Mantıkçada yer alan $\vee$ ve $\wedge$ terimleriyle verilen kısaltmaların burada da geçerli olduğunu aklımızda tutalım. Örneğin, ϕ ve ψ formülleri için $\neg\phi \to \psi$ formülü $\phi \vee \psi$ ile gösterilecek.

Tanım 13.1. ϕ, ψ ve φ'ler formül ve i, j ve k doğal sayıları için aşağıdakilerin herbirine ***matematikte mantıksal aksiyom*** denir.

1. $(\phi \vee \psi) \to \neg(\phi \to \neg\psi)$.
2. $\neg(\phi \to \neg\psi) \to (\phi \vee \psi)$.
3. $\phi \to (\psi \to \phi)$.
4. $(\phi \to (\psi \to \varphi)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \varphi)$.
5. $(\neg\phi \to \neg\psi) \to (\psi \to \phi)$.
6. $\exists v_i \phi \to \neg\forall v_i \neg\phi$.
7. $\neg\forall v_i \phi \to \exists v_i \neg\phi$.
8. $\forall v_i(\phi \to \psi) \to (\forall v_i \phi \to \forall v_i \psi)$.
9. v_i, ϕ içinde gözükmüyorsa $\phi \to \forall v_i \phi$.
10. $v_i = v_i$.
11. $i \neq j$ için $v_i = v_j \to (v_i = v_k \leftrightarrow v_i = v_k)$[33].
12. $v_i = v_j \to (v_i = v_k \leftrightarrow v_j = v_k)$.
13. $v_i = v_j \to (v_k = v_i \leftrightarrow v_k = v_j)$.
14. $v_i = v_j \to (v_i \in v_k \leftrightarrow v_j \in v_k)$.
15. $v_i = v_j \to (v_k \in v_i \leftrightarrow v_k \in v_j)$.

Mantıkçada her önermenin bir değer fonksiyona göre 0 ya da 1 olan bir değeri var olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan her mantıksal aksiyomun her değer fonksiyona göre değerinin 1 olduğunu söylemiştik. Matematikçede de her formülün 0 ya da 1 olan bir değeri olacak. Ayrıca matematikçede tanımlı her değer fonksiyonuna (henüz tanımlanmadı!) göre matematikte mantıksal aksiyomun değeri 1 olacak. Başka ne olabilir ki!

Şimdi

$$v_i = v_i \text{ ise } v_i = v_i$$

olduğunu gösterin sorusunu bir x kişine soralım. x kişisi, "soruyu anlamadım" diyebilir. Bu durumda soruyu

$$v_i = v_i \to v_i = v_i$$

[33] $i \neq j$ için $v_i \neq v_j$ olduğunu varsayıyoruz

olduğunu gösterin sorusunu soralım. Bu durumda x kişisi, "olduğunu gösterin ne demek?" diye sorabilir. Bu durumda x'i defetmek yerine sabırla

$$v_i = v_i \to v_i = v_i$$

formülünün doğruluk değerinin 1 olduğunu gösterin, diye soruyu başka fakat aynı anlamda sorulabilir. Bunun üzerine x, "hala soruyu anlamadım derse" o noktada bu kişi başımızdan defedilebilir.

14 Serbest ve Bağlı Değişken

Bir formülde $\forall$ ya da $\exists$ niceleyicilerin kapsamından bahsedilebilir. Bir niceleyicinin kapsamını açan ve kapatan ayraçlar belirler. Niceleyicilerin kapsamları her değişken için geçerli olmayabilir. Aşağıdaki örnekleri ele alalım. Burada $\forall x$ niceleyicisinin kapsamı altı çizili alan olarak gösterilmiştir.

(i) $\forall x\underline{(P(x))} \wedge Q(x)$

(ii) $\exists y \forall x\underline{(P(x,y) \to \forall z Q(z))}$

(iii) $\forall x \forall y\underline{(P(x,y) \wedge Q(y,z))} \wedge \exists x P(x,y)$

(iv) $\forall x\underline{(P(x) \wedge \exists x Q(x,z) \to \exists y R(x,y))} \vee Q(x,y)$

Bir formülün içindeki bir x değişkeni eğer bir niceleyici tarafından kapsanıyorsa x'e ***bağlı*** değişken denir. Bağlı olmayan değişkenlere ***serbest*** değisken denir. Örneğin,

$$\forall x P(x,y)$$

formülünde P yüklemindeki x bağlı değişkendir, y serbest değişkendir. Yukarıdaki gibi bir formül $\varphi(y)$ şeklinde yazılır ve buradaki y formüldeki serbest değişkeni gösterir. Serbest değişken içeren formüllere ***özellik*** denir.

15 Günümüzün Matematiği

Bu altbölümde yer alan birçok açıklama genel olarak, [1]'de yer alan yazının çok kısa bir özeti niteliğinde olup, yazıya bütünlük kazandırmak amacıyla verilmiştir.

Günümüzde yaygın olarak kullanılan matematik Zermelo-Fraenkel Küme Kuramı (sistemi) olarak adlandırılan yapı üzerine inşa edilmiştir. Zermelo-Fraenkel Aksiyomlar listesinin neler olduğunun detaylarına burada değinmeyeceğiz. Bu aksiyomların sayısı sonsuz olmakla birlikte bunlar sonlu sayıda aksiyomlar tarafından üretilebilir, bu nedenle bu listeyi sonlu gibi düşünebiliriz.

Matematikçede tanımlanan aşağıdaki formüller topluluğuna ***Zermelo-Fraenkel Aksiyomlar Topluluğu*** denir ve ZF gösterilir. Bu aksiyomları matematikçe alfabesinin yanında Türkçe "tercümelerini" de aşağıdaki gibi vereceğiz.

x ve y değişkenleri için, $\forall w(w \in x \to w \in y)$ formülü $x \subset y$ ile gösterilir.

Eştlik: $\forall x \forall y \forall z((z \in x \longleftrightarrow z \in y) \to x = y)$.

İki kümenin elemanları aynıysa o kümelere ***eşit kümeler*** denir.

Özellikle belirlenmek: $\forall x \forall w_1 ... \forall w_n \exists y \forall x (x \in y \longleftrightarrow x \in z \wedge \varphi(x, z, w_1, ..., w_n))$.

Burada $\varphi(x, z, w_1, ..., w_n)$, x, z, w_1,...,w_n değişkenlerinin özelliğidir. Elemanları sadece ve sadece z'nin elemanı olan ve $\varphi(x, z, w_1, ..., w_n)$ özelliğini sağlayan bir küme vardır ve tektir. Bu küme

$$\{x \in y : \varphi(x, z, w_1, ..., w_n)\}$$

ile gösterilir.

Boşküme: $\exists x \forall y (\neg (y \in x))$ Hiç elemanı olmayan bir küme vardır. Bu türde olan iki kümenin eşit olduğu gösterilebilir. Bu anlamda tek bir tane olan kümeye ***boşküme*** denir ve $\varnothing$ ile gösterilir.

İki Elemanlı Küme. $\forall x \forall y \exists z \forall w (w \in z \longleftrightarrow w = x \vee w \in y)$.

Verilen iki küme için elemanları sadece ve sadece bu kümeler olan bir küme vardır. Verilen kümeler x ve y'ler ile gösterilecek olunursa bu anlamda elde edilecek küme $\{x, y\}$ ile gösteriler. Bu küme $\{y, x\}$ kümesine de eşittir.

Kuvvet Kümesi: $\forall x \exists y \forall z (z \in y \longleftrightarrow z \subset x))$.

Verilen bir küme için elemanları sadece ve sadece bu kümenin altkümelerinden oluşan bir küme vardır. Bu küme $\mathcal{P}(X)$ ile gösterilir.

Bileşim: $\forall x \exists y \forall z (z \in y \longleftrightarrow \exists w (w \in x \wedge z \in w))$.

Verilen bir kümeye karşık, elemanları sadece ve sadece verilen kümenin elemanlarının elemanı olan bir küme vardır. Bu özellikteki küme tektir ve buna kümenin bileşimi denir. Küme, x ise bileşimi $\cup x$ ile gösterilir.

Sonsuz Küme: $\exists x (\varnothing \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$.

Burada $\{x\}$ kümesi $\{x, x\}$ kümesini göstermek üzere şunu söyler: Boşkümeyi içeren öyle bir küme vardır ki bu küme içerdiği bir küme ile elemanı sadece ve sadece bu içerdiği küme olan kümeyle olan bileşimini de içerir.

Görüntü Küme: x bir küme ve her $y \in x$ için $f(y)$ bir küme olsun.

$$\exists y \forall z (z \in y \longleftrightarrow \exists a (a \in x \wedge z = f(a)).$$

Tanım kümesi bir küme olan bir fonksiyonun görüntüsü bir kümedir diye okunabilir. Burada geçen z kümesi $\{f(a) : a \in x\}$ ile gösterilir.

Temellendirme: Bir kümenin kendi kendinin elemanı olma durumu problemdir. Bu problemi ortadan kaldırmanın yollarından biri temellendirme aksiyomudur.

$$\forall x \exists y (y \in x \wedge y \cap x = \varnothing).$$

Matematikte tanımlı formül olarak adlandırılan sonlu simgeler dizisini önermeler mantığında bir önerme olarak görebiliriz. Dolayısıyla yukarıda verilen formüllerin her birini birer önerme olarak da görebiliriz. Önermeler mantığında Γ-kanıt ve Γ-teorem kavramları verilmişti. Matematik alfabesinde benzer bir kavram bir fazla koşulla aşağıdaki gibidir.

Tanım 15.1. Γ bir formüller topluluğu ve φ bir formül olsun. $\varphi_m = \varphi$ olmak üzere, her i için aşağıdaki özellikleri sağlayan φ_1, φ_2,...,φ_m formüller var olsun.

i. φ_i mantıksal aksiyom yada Γ'nın bir elemanı.

ii. φ_k, $\varphi_j \to \varphi_j$ olacak biçimde j,$k < i$ var.

ii. φ_k, $\varphi_j \to \varphi_j$ olacak biçimde j,$k < i$ var.

iii. φ_i, $\forall v_k \varphi_k$ olacak biçimde j var.

φ_1...φ_m sonlu dizisine φ'nin bir *kanıtı* denir. Böyle bir kanıt varsa $\Gamma \vdash \varphi$ yazarız.

Tanım 15.2. Γ, bir formüller topluluğu olsun. Hem $\Gamma \vdash p$ hem de $\Gamma \vdash \neg p$ olacak biçimde bir p formülü varsa Γ'ya ***çelişkili sistem*** denir. Aksi halde Γ'ya ***çelişkisiz sistem*** denir.

Tanım 15.3. Γ, bir formüller topluluğu olsun. Verilen her φ formülü için $\Gamma \vdash \varphi$ ya da $\Gamma \vdash \neg\varphi$ oluyorsa Γ'ya ***tam sistem*** denir.

Şimdi sıkı duralım. 1931'de Kurt Gödel şunları kanıtladı:

i. ZF'de ZF'nin çelişkisiz sistem olduğu kanıtlanamaz.

ii ZF eğer çelişkisizse tam değildir.

ZF sisteminin tam olmadığına ilişkin örneklerden biri Şeçim Aksiyomu'dur. Önce fonksiyonun tanımını yapalım[34]: X ve Y iki küme ve $f \subset X \times Y$ yazalım [35]. Her $x \in X$ için $(x, a) \in f$ olacak biçimde $a \in Y$ var ve tekse, f'ye X'den Y'ye bir fonksiyon denir ve $f : X \to Y$ yazılır. I boş olmayan bir küme ve her $i \in I$ için X_i'ler boş olmayan kümeler olsunlar. I'dan $\cup_{i \in I} X_i$'ye tanımlı fonksiyonların topluluğu bir kümedir. Bu kümenin kartezyen çarpım olarak adlandırılan bir altküme aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 15.4. I boş olmayan bir küme ve her $i \in I$ için X_i boş olmayan bir küme olsun.

$$\prod_{i \in I} X_i := \{f : f : I \to \cup_{i \in I} X_i \text{ fonksiyon ve her } i \in I \text{ için } f(i) \in X_i\}$$

kümesine $\{X_i : i \in I\}$ kümesinin ***kartezyen çarpımı*** denir. Kartezyen çarpımın her elemanına ***seçim fonksiyonu*** denir.

Seçim Aksiyomu: Elemanları boş olmayan her kümenin bir seçim fonksiyonu vardır.

Bu aksiyom matematikte bir formüldür[36]. Bu formülü AC ile gösterelim. Seçim Aksiyomu, boş olmayan X_i kümelerinin kartezyen çarpımının boş olmadığını söyler.

Alıştırma 15.5. Seçim Aksiyomu'nu matematik alfabesinde yazınız.

[34]"Fonksiyon" kelimesi Tanım 2.1'dn hemen önceki paragrafta tanımlanmadan kullanılmıştı.

[35]Okur, X ve Y kümeleri için elemanları $x \in X$ ve $y \in Y$'ler olmak üzere, sadece ve sadece $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$'lerden oluşan bir kümenin varlığını göstermeli. Bu küme $X \times Y$ ile gösterilir

[36]Seçim Aksiyomu 1904'de Ernst Zermelo tarafından tanımlanmıştır.

ZF'nin birçok anlamda yetersizliğinin ortaya çıkması sonucu geçtiğimiz yüzyılda acımasız "kavgalara" neden olan Seçim Aksiyomu, matematiğin birçok alanının yaşam kaynağıdır. Onsuz, belki de yapılan matematiğin (biraz sallamayla) yüzde doksanı çöker, fonksiyonel analiz yok olur, topolojinin tadı tuzu kalmaz, cebir can çekişir.

ZF tutarlıysa, Seçim Aksiyomu'nun değilinin ZF'de bir teorem olamaycağı, yani $ZF \vdash \neg AC$ olmayacağı 1938 yılında Kurt Gödel tarafından kanıtlanmıştır. Kurt Gödel aynı zamanda, ZF'ye AC'nin eklenmesiyle oluşan aksiyomlar topluluğu ZFC ile gösterilmek üzere, ZF tutarlıysa ZFC'nin de tutarlı olduğunu kanıtlanmıştır. ZF tutarlıysa, Seçim Aksiyomu'nun ZF'de bir teorem olamaycağı, yani $ZF \vdash AC$ olmayacağı ise 1963 yılında Paul Cohen tarafında gösterilmiştir. Cohen, aynı zamanda, ZF'ye Seçim Aksiyomunun değilin eklenmesiyle oluşan aksiyomlar topluluğu ZFC ile gösterilmek üzere, ZF tutarlıysa $ZF\neg C$'nin de tutarlı olduğunu kanıtlanmıştır.

Matematikte yaygın olarak kullanılan ve Continuum Hypothesis/Süreklilik Hipotezi olarak bilinen bir önerme vardır (CH ile gösterilir). Bu önerme şunu söyler:

Süreklilik Hipotezi/Continuum Hypothesis:X sonsuz küme olmak üzere $X \subset A \subset \wp(X)$ olacak biçimde bir A kümesi için, A kümesi ya X kümesi ile birebir eşlenir, ya da $\wp(X)$ kümesi ile birebir olarak eşlenir. Süreklilik hipotezi CH ile gösterilir.

Bu hipotez aynı zamanda şu demektir: Doğal sayılar kümesinin sonsuzluğu ile reel sayılar kümesinin sonsuzluğu arasında (kesin olarak arasında) başka bir sonsuzluk yoktur. Kurt Gödel, 1938'de ayrıca CH'nin ZFC'de bir teorem olmadığını göstermiştir. Paul Cohen (1963) ise $\neg CH$'nin ZFC'den kanıtlanamayacağını göstermiştir. Bu iki sonuçtan CH'nin ZFC'den bağımsız olduğu ortaya çıkar. Yani, ZFC tutarlıysa, CH, ZFC'den bağımsızdır. Ayrıca ZFC tutarlıysa, $ZFC + CH$'nin (ZFC'ye Süreklilik hipotezinin eklenmesiyle elde edilen formüller topluluğu) tutarlı olduğu ve $ZFC + \neg CH$'nin (ZFC'ye Süreklilik Hipotezinin değilinin eklenmesiyle elde edilen formüller topluluğu) tutarlı olduğu kanıtlanmıştır.[37]

Detaylara girilmeden tanım seviyesinde verilen seçim aksiyomu ve süreklilik hipotezi okurların çoğuna yabancı gelecek ve bundan dolayı korkuyla bakılabilecektir. Ama bu korkuların aşılması, bir anlamıyla, insan olmanın gereğidir. Daha ileride verilebilecek yazılarla bu konunun daha iyi anlaşılabileceğini umut ediyoruz.

Bu makalede geçen konular, bazı yorumlar dışında, aşağıda verilen referanslarda bulunabilir.

Kaynaklar

[1] A. Çevik ve Z. Ercan, *Nedir Bu "Modern" Matematik*, Bilim ve Gelecek (yayına kabul edildi.)

[2] A. Çevik, *Matematik Felsefesi: Mantıkçılık*, Matematik Dünyası, Sayı:104, 50-54.

[3] J. N. Crossley, C.J. Ash, C.J. Brickhill, J.C. Stillwell, N.H. Williams *What is Mathematical Logic?*, Amsterdam, 1971.

[4] J.W. Robbin, *Mathematical Logic*, W. A. Benjamin, INC., New-York-Amsterdam, Amsterdam, 1969.

[37] Paul Cohen *zorlama (forcing)* yöntemiyle ZFC tutarlıysa $ZFC\neg CH$'nin de tutarlı olduğunu göstermiştir ve bu buluşuyla kendisine 1966 yılında Fields madalyası verilmiştir.

[5] İnternetten indirmiş olduğum ama şu anda internet adresini bulamadığım henüz basılmamış kitap notları (yazarı hakkını helal etsin).

[6] A. Nesin, *Önermeler Mantığı*, Nesin Matematik Köyü, 2009.

[7] Y. Sürmeli, *Avusturalya'daki "dünyanın en eski kaya resmi" tarihlendirildi*, Bilim ve Gelecek, Sayı:152, 2016.

[8] D. Wagner, *If mathematics is a language, how do you swear in it?*, TMEE, vol.6, no.3, p.449-458, 2009.

BİR ELEŞTİRİ DENEMESİ

Soyutlama kabiliyeti üzerine

Hayvanı insandan ayıran ilk özellikleri düşünelim. Sanat ve yaratıcılık kabiliyeti bunlardan biridir. İlk resim çizen insanı mı takdir etmek lazım yoksa ilk soyutlama yapan insanı mı? Her resim soyutlamaya girmeyebilir. İki türlü çizim düşünülebilir: Souyutlaştırma ve somutlaştırma. İlkel insan gördüğünü zihninde canlandırdıktan sonra oluşturduğu (soyut) hatıranın tikel bir kopyasını duvara çizmiş olabilir. Bu, soyut bir kavramı tikelleştirmektir. Mağara duvarına bir hayvan resmi çizilmesi bir fikri değil de gördüğünü taklit etme veya tikel kopyasını oluşturma olarak anlaşılabilir. Öte yandan tikelleri ortaklaktırmak için ilk simgeyi icat eden insan matematiğin mucididir diyebilir miyiz? İlk hayvan resmi çizen insan değil, bütün aslanları, filleri, bütün kuşları ortak bir sınıfa indirgeyen insan dikkate alınmalıdır. Mağara duvarına çizilen bir hayvan betimlemesi görmüş olduğumuzu duvara çizmekten ibarettir, taklit etmektir. Çeşitli tikelleri bütünleştirme ve bunu simgelere indirgeme veya tanımlama fikri ise soyutlamadır diyebiliriz. İlkel insan çevresinde bir sürü ağaç görüyor. O da ağaç, şu da ağaç, bu da ağaç. Hepsinin aynı *türden* bir cisim olduğunu idrak ederek buna genel bir isim veriyor. İngilizler buna 'tree' demiş, Türkler 'ağaç' demiş vs. Dilin icadı aslında modern matematiğin tohumudur.

Matematiksel tümevarım üzerine

Aslında her sayıyı bilmek bütün sayıları bilmeye yeterlidir. Aksi halde bir sayıyı bilemezdik. Bu sayıya n diyelim. O halde her $m \leqslant 1$ için $n + m$ bilinemez. $m = n$ iken, yani $n + n$ sayısı daha da bilinemez bir sayı haline gelir. Kısacası sadece sonlu tane sayı bilirdik, o da n'ye kadar olan sayılar. Ancak her sayının ardılını bildiğimizi varsaymıştık. Ancak bu durumda $n + 1$'i bilemeyiz. Çelişki. 0 sayısını bilirsek ve verilen bir sayının ardılını bilirsek bütün sayıları biliriz. Bu neticeye varmamız *matematiksel tümevarım prensibi* (principle of mathematical induction) ile mümkündür. Bu prensip şunu söyler: P, doğal sayılarla ilgili bir özellik olsun. Eğer $P(0)$ sağlanıyorsa ve eğer $P(n)$ sağlandığında $P(n+1)$ de sağlanıyorsa, o halde bütün sayılar için P özelliği sağlanmış olur.

Mantığın mahiyeti üzerine

Mantıkta her önermenin önemli olduğu gerçekten doğrudur. Hatta "Güneş buzdansa kediler gitar çalabilir" gibi 'saçma' gelen bir önerme bile önemli, üstelik doğru bir önermedir. Ancak mantık ilmi her şeyi anlamaya yetmiyor. Bir mantıkçı olarak diyebilirim ki akıl ve mantık hakikati kavramaya yetmez. Buna bir örnek verelim. Antik Yunan'da sofistler her alanda söz sahibiydiler. Doktor da onlar, avukat da onlar, yönetici de onlar vs. Bilindiği kadarıyla gerçek bir olay olarak Protagoras ve Euathlos'un bir mahkeme davası paradoksu vardır. Euathlos, bir sofist olan Protagoras'tan kendisine hukuk öğretmesini ister. Bunun için Protagoras'a para ödeyecektir. Yarısını peşin diğer yarısını da avukat olup ilk davasını kazandıktan sonra. Aralarındaki anlaşma bu. Eğitim bittikten sonra Euathlon, verdiği peşin paranın aldığı eğitime kafi geldiğini düşünür ve diğer yarısını vermek istemez. Protagoras davacı olur ve mahkemeye çıkarlar. Kim haklı? Protagoras şunu biliyor: Mahkemede kaybetse de kazansa da para alacak. Eğer kazanırsa mahkemenin kararı gereği para alması lazım. Yoksa mahkemenin hükmünün bir anlamı olmaz. Kaybederse bu kez de aralarındaki anlaşma gereği karşı taraftan borç doğacak. Yine para alacak. Euathlos da aynı şekilde biliyor ki o da kaybetse veya kazansa para vermeyecek. Kazanırsa mahkemenin kararı gereği para vermemesi lazım. Verirse mahkemenin hükmünün anlamı olmaz. Kaybederse anlaşma gereği borç doğmayacağı için yine para vermeyecek. Şimdi bu iki kişiden hangisi haklı? Bu dava binlerce yıldır mantıkla çözülememiş.

Pozitivizm ve genel/tikel bilgi üzerine

10'uncu dipnot ve benzer yerlerle ile ilgili bir yorum yapmak istiyorum. Pozitivizm felsefesinin tikel bilgi peşinde koşma anlayışının matematik için yetersiz olduğunu belirtmek gerekir. Pozitivizm felsefesine göre yere bırakılan *her* cisimin yere düşeceğinin elbette garantisi yok. Güneşin yarın doğacağının garantisi elbette yok. Suyun 100 derecede kaynadığının da garantisi verilemez. Hangi su? Hangi sular tecrübe edildi? Kaç deney yapıldı? 10? 100? 100 bin deney? Bundan sonra da bütün suların 100 derecede kaynayacağı söylenebilir mi? Pozitivizme göre söylenmemeli. Çünkü pozitivizme, göre bilim genel bilgi peşinde koşmamalı. Bilgi sadece tekil olmalı. Hüküm, denek ile kısıtlıdır. Buna göre bilim, genel bilgi vermemeli. Ancak belki dikkatten kaçan bir nokta var. Genel hükümlerde gizli olarak çok basit bir kanun kullanılıyor. Aristoteles'in ayniyet prensibi: *Her şey kendisiyle aynıdır*.[38] Neden mi? "Su 100 derecede kaynar" demek şu demektir: Tecrübe edindiğim su 100 derecede kaynadı. **Eğer** tecrübe etmediğim diğer sular tecrübe ettiğim suyla **aynıysa** o halde o sular da 100 derecede kaynar. Yani burada "su 100 derecede kaynar" bilgisinin verilmesinin arkasında metafizik direkt olarak rol oynamaz. Çünkü böyle bir hüküm koşullu bir önermedir. Matematikte de evrensel önermeler aslında koşullu önermelerdir. "Her çift sayı 2'ye bölünür" ifadesi aslında "Eğer x bir çift sayı ise, x 2'ye bölünür" anlamına gelir. "Su 100 derecede" kaynar demek "Bütün sular 100 derecede kaynar" demek değildir, "Eğer diğer sular tecrübe ettiğim suyla aynıysa o su da 100 derecede kaynar" demektir. Hüküm, Aristoteles'in ayniyet prensibini kullanır. Bilimde böyle bir genel sayılabilecek bilgiyi doğru kabul etmemizin sebebi diğer bütün suların da deneyle tecrübe ettiğimiz su ile *aynı* olduğuna *inanmamızdır*. Buna göre "Su 100 derecede kaynar" hükmü koşullu bir hükümdür. "Yere bırakılan her cisim yere düşer" genel bir hüküm olarak görülmek zorunda değildir, koşullu bir hüküm olarak da ifade olunabilir. "Bütün insanlar ölümlüdür" hükmü için de benzer şeyi söyleyebiliriz. O halde pozitivizme göre problem genel önermeleri ifade etmek değildir. Asıl problem diğer bütün suların tecrübe edinilen suyla aynı olduğuna inanmaktan kaynaklanmaktadır.

Latin Alfabesi'nin kökleri üzerine

[38]Şimdi, burada başka bir mesele daha var. Aristoteles'in ayniyet presibi sadece bir mantık kanunu mudur yoksa fiziğe de tabi midir? Bazı filozoflara göre kainatta hiç bir cisim kendisiyle aynı değildir. Bunun sebebi zamanın akışkan olmasıdır. Yani Aristoteles'in presibini belli bir t anı için ele alırsak, sorun yok. Ancak *an* dediğimiz şey öyle bir zaman dilimidir ki daha kücük bir dilime ayrılamaz. Bir cisim t anında tabii ki kendisidir. t anının dışında kendisinin aynısı değil, kendisinin *misli* olur. Hal böyle olunca Aristoteles'in ayniyet prensibinin zamana bağlı bir kanun olduğunu düşünmemek gerekir.

Yunan Alfabesi'nin kökeninin Fenike Alfabesi olduğu doğrudur. Ancak Latin Alfabesi ayrı bir koldan gelmiştir. Latin harfleri, Roma İmparatorluğu'nun kurucu unsuru olan Etrüsk'lerin alfabesinden gelmiştir. Etrüsk Alfabesi bir Proto-Latin Alfabesi sayılabilir. Etrüsk dilinin bir Avrupa dili olmadığı biliniyor. İlginç olan asıl nokta, Etrüsk Alfabesi ile Orhun Alfabesi arasındaki karakter ve ses benzerlikleridir. Etrüsk Alfabesi'nin bu yüzden Orta Asya kökeninden geldiği düşünülmüştür. Bu konuda daha fazla bilgi için, temelde Kazım Mirşan'ın çalısmalarına dayanan, Sinan Meydan'ın *Atatürk ve Türklerin Saklı Tarihi* adlı eserine veya Haluk Tarcan'ın *Öntürk Uygarlığı Resmi Tarihin Çöküşü* eserine bakabilir.

İki elemanlı alfabenin yeterliliği üzerine

Sadece iki elemanlı bir alfabe ile herhangi bir n elemanlı alfabeyi temsil edebiliriz. Mesela sekiz adet farklı sembolü ikili tabanda temsil etmek için 0 ve 1 sembollerini kullanarak sadece üç basamağa ihtiyacımız var.

$$\begin{aligned}a &= 000,\\ b &= 001,\\ c &= 010,\\ d &= 011,\\ e &= 100,\\ f &= 101,\\ g &= 110,\\ h &= 111.\end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. O halde *baba* kelimesini 001000001000 şeklinde yazabiliriz. Benzer kodlamayı her türlü alfabe için ikili taban kullanarak gösterebiliriz. O zaman 0 ve 1 dısındakı rakamlara ne gerek var? Ünlü matematikçi Leopold Kronecker "Tanrı tam sayıları yaratmıştır, geri kalan her şey insan evladının işidir." demiştir. Bunun yerine diyebiliriz ki "Tanrı 0 ve 1'i yaratmıştır, geri kalan her şey insan evladının işidir".

4 soruya cevap

Alıştırma 4.4'ün sonundaki 4 soruya olası cevaplar aşağıdaki gibi olabilir.

i)Mantık nedir?

Ünlu mantıkçı Gottlob Frege'ye göre mantık şöyle tanımlanmıştır:

"Doğruları keşfetmek tüm bilimlerin görevidir, mantığa doğru yasaları ayırt etmek düşer."

Bir diğer ünlü mantıkçı olan Alfred Tarski,

"Mantık tüm bilimler için ortak kavramların anlamını inceleyen ve kavramları yöneten genel yasaları belirleyen bir disiplinin adıdır."

demiştir.

Bunun yanında mantık, doğru düşünme ilmidir diyebiliriz. Mantık ilminin icap ettiği neticeler tartışmasız doğru olarak kabul edilir. Çünkü mantıksal bilgi *a priori*'dir. Bu tip bilgilerin doğruluğu veya yanlışlığı deneyle gözlemlenemez, ancak tanımlara dayalı tespit edilir. Tanım, tikel varlıkları ortaklaştıran özelliğin adıdır. Tanım, bir şeyin anlamı üzerinde mutabık kalmaktır. Örneğin '=' ilişkisinin tanımı bildiğimiz 'eşittir' olarak değil de 'büyük' anlamında olsaydı '1=1' yanlış olurdu. Mantık, tanımlara bağlı olarak doğruyu ve yanlışı tespit etmemizi sağlayan araçtır. Ancak *hakikat* çok daha yüksek boyutlu bir şeydir. Mantık, hakikatin zerresini anlamamıza anca yetiyor.

ii) Mantıklı olmak nedir?

Mantık kurallarını çiğnememek mantıklı olmak için yeterlidir. Ancak çevremizden sık olarak duyduğumuz 'mantık evliliği' diye bir şey var onu çözebilmiş değilim. Karı-koca sembolik mantık kullanarak mı sevgisini dile getiriyor, yoksa ortada başka bir çıkar ilişkisi mi var? Terimin tanımı gereği birincisi olması lazım gelirken genelde ikincisi mantık evliliği olarak biliniyor. Mantıklı olmak çıkarcı olmak mı demek? Mantık gibi hakikati anlamaya yönelik olan kutsal bir ilmin ismini kirli emelleri için kullanan çıkarcı insanlar utansın.

iii) Bir balinanın intihar etmesi mantıklı mıdır?

İntihar, canlının kendi hayatını sonlandırması için kalkıştığı istemli eylemin adıdır. Hayvanların kendini istemli şekilde öldürmesinin mantıklı olup olmadığının yanıtı hayvanların istemli hareket edip etmediğine bağlıdır. Bu da birçok felsefi ve bilimsel problemi de beraberinde çözecektir. Hayvanlar iradi olarak düşünebiliyorsa hayvanlar matematik de yapar felsefe de yapar sanat da yapar edebiyat da. Bu işin sonu pek tekin olmayabilir. Süreklilik Hipotezi'ni bir gün bir maymun çözerse matematikçinin hali perişan olur.

iv) Mantık alfabesinin seçimi mantıklı mıdır?

Mantık simgelerini seçtikten sonra bunları farklı anlamlarda kullanmadığımız sürece seçilen her mantıkça alfabe mantıklı. Farklı anlamlarda kullanmak sorunlara yol açabilir. $\forall$ yerine Λ, $\exists$ yerine Σ diyebilirdik. Alfabe seçimi değil, seçtikten sonra kullanımı mantıklı olmalı.

Son olarak "insan olmak mantıklımıdır?" sorusu için verilecek cevap ancak bir karşılaştırma neticesinde mümkün olabilir. Bu soruyu insan olma erdemine ulaşmış ve aynı zamanda insanlık dışından nasibini almış varlıklara sormalıyız ki mantıklı olanın hangisi olduğuna karar verebilelim.

Önermelere verilen *doğru* ve *yanlış* değerlerinin önemi üzerine

Alıstırma 8.1'de sorulan soru kullandığımız mantık sistemine göre değişir. Bunun için *pozitif* ve *negatif* önermelerin ne olduğunu anlamak gerek. Doğru'yu 'var', yanlış'ı 'yok' olarak gösterirsek klasik mantık kurallarına göre yokluğun olmadığı durum varlık olarak nitelendirilebilir. Yani yanlışın yanlış olmasından doğru çıkarılır. Doğrunun olmadığı durum zaten yanlışın olduğu durumdur. O halde klasik mantıkta:

Pozitif önermenin sağlanması kendisinden ya da negatif önermenin sağlanmamasından elde edilebilir.

Bunun sebebi klasik mantıkta *üçüncü durumun imkansızlığı* kanununun olmasıdır: *Bir önermenin ya kendisi ya da değili doğrudur*. Sezgici mantıkta bu kanun yoktur. Sezgici mantıkta yukarıda bahsedildiği gibi pozitif önermenin sağlanması sadece ve sadece doğrudan gösterilebilir. "Yanlış değil" demek "doğrudur" demek değildir. "Doğru değil" demek tabii ki "yanlıştır" demektir. Yani "var değil" demek "yoktur" demektir. Ancak "yok değil" demek “vardır" demek değildir. Sezgici mantıkta bir nesnenin varlığını iddia etmemiz için o nesneyi inşa etmeliyiz. Bu asimetrik özellikten dolayı doğru olma durumu yanlış olma durumundan daha kıymetlidir, en azından sezgici mantık sistemleri için.

Gelişigüzel tikel objeden genele geçis üzerine

“Bütün canlılar ölümlüdür" gibi bir evrensel önermenin doğruluğu ancak metafizikle mümkündür. Her ne kadar bu önerme bize doğru gelse de bütün canlıların ölümlü olup olmadığını gerçekten deneyle tecrübe ederek bu sonuca varmış olmuyoruz. Şu ana kadarki canlıların ölümlü olduğunu gözlemledikten sonra metafizik yoluyla bundan sonra gelecek olan bütün canlıların da ölümlü olacağına *inanarak* bu önermenin doğruluğuna hükmediyoruz. O halde bilimsel kanıt ile mantıksal kanıtı ayırmak gerekiyor burada. Bilimsel olarak bütün suların 100 derecede kaynadığını hepsini tecrübe etmesek de kabul ediyoruz. Çünkü diğer suların da tecrübe ettiğimiz suyla aynı olduğuna inanıyoruz.

Evrensel önermelerin kanıtında bir *aşkınlık özelliği* kullanılıyor. Rastgele bir suyu ele aldığımızda 100 derecede kaynar dediğimizde “rastgele bir su" bütün olası suları içeriyor. Ancak deney ve gözlemle rastgele suları değil, belli bir takım sonlu sayıda suları tecrübe etmiş bulunuruz. Deney sonucunda “rastgele bir su alındığında..." demek soyut olmayan dünyalar için geçerli olmayabilir. Çünkü “rastgele" alınan bir su için verilen hüküm bütün suları kapsar. Neden kapsar? Mantıkta ve matematikte neden rastgele alınan nesnenin evrensel özelliğe sahip olduğunu tahmin edebiliriz. Rastgele, gelişigüzel alınan nesne tikeli temsil etmez, soyutlamanın kendisini temsil eder. Bu da ancak soyutlamanın mümkün olduğu matematiksel evrende mümkün olabilir.

Aksiyom taslakları üzerine

Zermelo-Fraenkel Kümeler Kuramı'nın sonsuz tane aksiyomu vardır. Ancak bu aksiyomlar sonlu bir tanıma sahip olan aksiyom taslağı ile üretilir. Örneğin, *Özellikle Belirlenme* (Axiom Schema of Separation) tek başına bir önerme değildir, bu bir *taslak* olarak kabul edilir. Çünkü aksiyomdaki φ formülü bir çok şey olabilir. Tek bir belli formül için aksiyom yazamayız. O halde verilen her formül için ayrı ayrı aksiyomlar yazmak yerine aksiyom taslağı yazıp genel bir aksiyom formu verebiliriz. Bu forma *aksiyom taslağı* diyoruz. O halde yukarıda bahsi geçen aksiyomun adı aslında *Özellikle Belirlenme Aksiyom Taslağı* olmalı. Benzer şey *Görüntü Küme* için de geçerlidir.