Fibonacci ve Lucas Graflarındaki Hiper-Küplerin Özellikleri

Elif Saygı
Hacettepe Üniversitesi, Ankara
e-mail: esaygi@hacettepe.edu.tr

En temel bağlantı ağı (interconnection network) modellerinden biri n-boyutlu hiperküp grafı $H_n = (V_n, E_n)$ dir. İdeal bir bağlantı ağında, köşe kümesi V_n işlemcileri, kenar kümesi E_n ise işlemciler arasındaki iletişim bağlantılarını temsil eder. H_n nin köşeleri, uzunluğu n olan tüm ikili diziler ile gösterilir ve iki köşe arasında bir kenar ancak ve ancak temsil eden diziler arasındaki Hamming uzaklığı bir ise vardır. Bir grafın iki köşesi arasındaki graf uzaklığı, grafta bu köşeleri birleştiren en kısa yolun uzunluğu olarak tanımlandığından H_n de bu uzaklık Hamming uzaklığı ile çakışır.

Lucas ve Fibonacci grafları (Lucas ve Fibonacci küpleri olarak da adlandırılır) hiperküpün özel alt graflarıdır. Bu graflar simetri ve indirgeme özellikleri kullanılarak bağlantı ağlarında yeni bir hesaplama modeli olarak sunulmuşlardır [1,2]. Bu graflar indirgeme bağıntısı ile tanımlamaya olanak veren çok kullanışlı ayrışımlara sahiptirler. n boyutlu Fibonacci grafı Γ_n ile gösterilir ve bu graf H_n nin köşe kümesi V_n den ikilik dizi gösteriminde ardışık iki adet 1 içeren tüm köşelerin çıkarılması ile elde edilen graftır. Benzer şekilde n boyutlu Lucas grafı Λ_n ile gösterilir ve H_n nin köşe kümesi V_n deki tüm köşelerin ikilik dizi gösterimlerinin çembersel olarak ele alınıp, ardışık iki adet 1 içeren tüm köşelerin çıkarılmasıyla elde edilir. Dolayısıyla Λ_n, H_n nin ve Γ_n nin alt grafıdır.

Bu iki graf ailesi, hiperküp ile yakından ilgili olduklarından dolayı içerdikleri daha düşük boyutlu hiperküplerin yapısını ele almak çok doğaldır. [3,4] de Lucas ve Fibonacci graflarındaki hiperkülerin sayısını ve bu hiperküplerin 0 köşesine olan uzaklıklarını içeren iki değişkenli ve $C(\Lambda_n, x; q)$ ve $c_n(x; q)$ polinomlarını elde ettik. Bu sonuçlar $C(\Lambda_n, x; q)$ ve $c_n(x; q)$ için bölünebilme, pozitiflik ve fonksiyonel özdeşlikleri içeren bir çok özelliği içermektedir ve [5] de verilen polinomları genellemekte ve rafine etmektedir.

Γ_n içerisindeki kesişmeyen ve H_k ye izormorfik olan alt grafların maksimum sayısı $q_k(n)$ ile gösterilsin. Bu sayı için çeşitli indirgeme formülleri ve toplam formülü [6] da verilmiştir. Ayrıca n sınırsız büyürken $\frac{q_k(n)}{|V(\Gamma_n)|}$ oranının $\frac{1}{2^k}$ ya eşit olduğu sanı olarak ifade edilmiştir. [7] de $q_k(n)$ yi üreteç fonksiyonları yardımıyla genel bir k değeri için ifade ettik ve $\lim_{n\to\infty} \frac{q_k(n)}{|V(\Gamma_n)|} = \frac{1}{2^k}$ olduğunu gösterdik.

1. W.-J. Hsu. Fibonacci cubes–a new interconnection technology, IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst. 1993, 4(1), 3–12.
2. E. Munarini, C.P. Cippo, N.Z. Salvi. On the Lucas cubes, Fibonacci Quart. 2001, 39(1), 12–21.
3. E. Saygı, Ö. Eğecioğlu. q-counting hypercubes in Lucas graphs. UCSB Technical Report, 2016.
4. E. Saygı, Ö. Eğecioğlu. q-cube enumerator polynomial of Fibonacci graphs. UCSB Technical Report, 2016.
5. S. Klavžar, M. Mollard. Cube polynomial of Fibonacci and Lucas cube, Acta Appl. Math. 2012, 117, 93–105.
6. S. Gravier, M. Mollard, S. Špacapan, S.S. Zemljič. On disjoint hypercubes in Fibonacci cubes, Discrete Appl. Math. 2015, 190-191, 50–55.
7. E. Saygı, Ö. Eğecioğlu. Counting Disjoint Hypercubes in Fibonacci Cubes. UCSB Technical Report, 2016.