Rasyonel Sayılardan İrrasyonel sayılara Genişleme

Sonsuz küçük ve sonsuz büyük sayıların ortaya çıkışı limit işlemini ister istemez matematiğe soktu. Sonsuz küçük ve sonsuz büyük kavramları beşinci işlem diye adlandırılam limit işlemini beraberinde getirdi. Bir zamanlar matematiği *ilkel* (elementary) ve *yüksek* (Higher) diye ikiye ayırmak moda idi. Bu ayrım çok basit bir şekilde yapılırdı. Yalnız dört işlemi içeren matematik ilkel matematik, ona beşinci işlem olarak *limit* eklendiğinde ortaya çıkan matematiğe de yüksek matematik denirdi.

Matematisel işlemlerin ve matematiksel yapıların çok büyük çoğunluğu sayılar üzerinde kuruludur. Sayılardan başka nesnelere yapılan genelleştirmelerde de sayıların özelikleri taklit edilir. Bu yöntemin ayakları sağlam yere basar. Yöntemin bize verdiği harikulade yapılar, yalnız matematik sanatında insan aklının yarattığı soyut güzellikleri ortaya koymakla kalmaz, bilimin, özellikle fiziğin gerekseme duyduğu araçları da üretir. Matematiğin bu yöndeki gelişimi insanın doğa olaylarına egemen olma savaşını kazanmasına neden oldu.

Calculus, başlangıçta *infinitesimal calculus* diye adlandırılırdı. İlgi alanları o zamanlar yeni olan *limit, fonksiyon, türev integral* ve *sonsuz seriler* idi. *Infinitesimal calculus*'un İngiliz matematikçi ve fizikçi Isaac Newton (4 Ocak 1643 - 31 Mart 1727) ve Alman matematilçi Gottfried Wilhelm Leibniz (1 Temmuz 1646 - 14 Kasım 1716) tarafından birbirlerinden bağımsız olarak geliştirildiğini kabul edilen görüşten yanayız. Kimin kimin düşüncesini çaldığı yönünündeki tartışma taraflar yaşarken devam ede durdu. Ama bizim konumuz o değil. 17.yüzyılda ortaya konan infinitesimal calculus (sonsuz küçükler ve sonsuz büyükler hesabı) doğa olaylarını açıklamakta etkin bir araç oldu.

Matemetik tarihine girmeden irrasyonel sayıların ortaya çıkışını anlatlamak zordur. Bilmediğimiz bu konuyu kısa kesmek için şimdi kabul ettiğimiz tanımlara dayanacağız. a ve $b \neq 0$ tamsayılar olmak üzere $\frac{a}{b}$ biçiminde yazılabilen sayılara rasyonel, böyle yazılamayanlara da irrasyonel sayı diyoruz. Aslında irrasyonel terimi *hesaplanamayan oranlar* (immensurable ratio) adıyla ortaya çıktı. Çıkış yerlerine bakılınca insan aklının onu bağımsız olarak farklı coğrafyalarda yarattığı söylenebilir. Eski Yunan, İran, Hint, Çin uygarlıklarında hesaplanamayan oranlar hep insan aklını şu ya da bu şekilde meşgul etmiştir. Şimdi hesaplanamayan oranları kolayca ifade ediyoruz. Bir sayma sisteminde, örneğin on tabanlı sistemdeki yazılışlarında kesir basamakları sonsuza uzanıyor ve haneler tekrarlı değilse o tür sayılar irrasyonel sayıdır.

İşin zor yanı şudur: aritmetiğin temeli olan dört işlemde kullandığımız yöntem, daima sayının sağdaki son basamağından başlar. Rasyonel sayılarda bu doğaldır. Ama irrasyonel sayılarda, onlu açılımın sonsuz ve tekrarlanmayan hanesi var; sağda son basamak yoktur. Dolayısıyla, dört işlem yöntemlerimiz onlara uygulanamaz. Zaten *'hesaplanamayan oranlar* (incommensurable) sözü de bunu ifade ediyor olmalıdır.

Sayı ekseni üzerine rasyonel sayıları yerleştirdiğimiz zaman, irrasyonel sayılara karşılık gelen boşlukları yoketmek için geometrik yöntemler revaçta olsa bile, aritmetik yöntemlerle boşlukları yoketme çabası Fransız matematikçi Baron Augustin-Louis Cauchy (21 August 1789 - 23 May 1857), Alman matematikçi Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (31 Ekim 1815 - 19 Şubat 1897), alman matematikçi Julius Wilhelm Richard Dedekind (6 Ekim 1831 - 12 Şubat 1916) ve kendi dönemlerinin ünlü öteki matematikçileri geometrik yollara dayalı yöntemleri aritmetik yöntemlere çevirmeye çalıştılar. Bu çabaların sonunda Dedekind, bu gün kendi adıyla anılan *'Dedekind Kesi-*

mini' ortaya koydu. Aslında calculus'a yeni başlayanların zor anladığı *Dedekind Kesimi* rasyonel sayı dizilerinin limiti olarak ifade edilebilir. Limit kavramı Topolojiye taşınarak en genel haline ermiş olsa bile, calculus'a yeni başlayan öğrencilerin sezgisel olarak kolayca algılayacakları bir kavramdır. O nedenle, rasyonel sayılardan irrasyonel sayılara genişlemeyi, üstü örtülü bırakmak yerine, limit sezgisine bırakmak daha etik ve daha pedagojik görünmektedir.

Matematiğin gelişimine göz atarsak, *calculus* öğretiminde yeni bir aşamaya geçme zamanının geldiğini söyleyebiliriz. Aslında yapılmasını istediğimiz şey, calculus öğreniminde çoğunlukla üzerini örterek geçiştirdiğimiz zor konular üzerindeki örtüyü kaldırmaktır. Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966)'in dediği gibi kavramların algılanmasını öğrencinin sezgisine dayandırmak daha etik bir yol olacaktır.

Ne demek istediğimizi örneklerle açıklamak daha kolay olacaktır. Bir zamanlar irrayonel sayılar bilinmiyordu. O nedenle, *'bir çemberin çevresinin yarıçapının kaç katı olduğu'* sorusuna dünyanın en akıllı adamları yanıt aradı. Olmayan yerde sürdürülen bu arayış M.Ö. dönemlerden başlayıp irrasyonel sayıların ortaya çıktığı 17.yüzyıla kadar sürdü. Bu çok çok uzun bir süredir. Bu uzun sürede, örneğin, Arşimedin bulduğu yöntem soruya rasyonel sayılar içinde verilebilecek en iyi yanıtı vermekle kalmıyor, adını koymadan *limit* kavramından yararlanıyordu. Elealı Zenon (MÖ 490 - MÖ 430) *'tavşan kaplumbğaya yetişemez'* diyerek halktan haklı bir *deli* ünvanını aldı. Ama onun aldığı ünvanın onura dönüşmesi sonsuz serilerin ve ona dayalı limit kavramının ortaya çıkışına kadar sürdü.

Sayı kümelerini

1. $\mathbb{N}$: Doğal sayılar
2. $\mathbb{Z}$: Tam sayılar
3. $\mathbb{Q}$: Rasyonel saylar
4. $\mathbb{R}$: Gerçel sayılar
5. $\mathbb{C}$: Kompleks sayılar

diye sınıflandırırız. Bu kümeler arasında $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ kapsaması vardır. İlk üçü üzerindeki işlemleri (fonksiyonları) yalın aritmetik yöntemleriyle yaparız. Ama onları $\mathbb{R}$ kümesine genişletirken, genellikle, şeylerin üstündeki örtüyü kaldırıp, ileride anlaşılacak bazı konuları şimdiden öğrencinin sezgisine dayandırmak daha doğru olabilir. Brouwer'in önerdiği gibi, zaten matematiğin bir çok konusunu öğretirken öğrencinin sezgisine dayanırız. Bunu apaçık yapmakta ne sakınca olabilir.

Gerçel sayılar bir gruptur deriz, ama $\sqrt{2}+\sqrt{2}$ yi toplama işlemiyle karşılaşınca, $2\sqrt{2}$ doğru yanıtını vererek konuyu elimizdeki şalla örteriz. Burada $\sqrt{2}$ nin irrasyonel sayının adı olan bir resim olduğunu söylemez, bu iki sayının toplamını nasıl yaptığımızı anlatmayız. Yaptığımız iş $5+5 = 2\times 5$ gibidir. Öğrencilerin çoğu, irrasyonel sayılarla tam işlem yapılamayacağının, irrasyonel sayı içeren her işlemin aslında rasyonel sayılara dönüş yapan ve ancak yaklaşık değer veren bir işlem olduğunun bilincine varamaz. Bu öğrenciler, yaptığımız hilenin farkına varmaz. Benzer şekilde, logaritmayı tanımlarken, çok doğru ve kolay bir yol izleyerek

$$lnt = \int_1^t \frac{1}{x}\,dx \tag{1}$$

eşitliğini kullanırız. Ama $\frac{1}{x}$ fonksiyonunu nasıl tanımladığımızın üstünü ya örteriz ya da o tanımı çok açık olmayan geometrik algılamaya dayandırırız.

Matematiğin ulaştığı bu aşamada şunu öneriyoruz. Gerçel sayılar rasyonel dizilerin limitleridir. O zaman limiti yeni bir nasne olarak kabul edip, gerçel sayıları bu nesnelerinin denklik sınıfları olarak tanımlamak doğru ve sezgisel anlatılması mümkün olan bir yoldur. Denklik sınıflarını zaten kümelerde işliyorz. Aynı limite giden diziler aynı gerçel sayıyı tanımlayacaklarına göre, onların denklik sınıflarını gerçel sayı kümesi olarak tanımlamak doğru olacaktır. 1.03.2017.

Saygılarımla,
Timur Karaçay