“$\sqrt{2}$ KRİZİ” NASIL ÇÖZÜLDÜ VE GELİN-KAYNANA KRİZİNE “MİLLİ VE YERLİ” ÇÖZÜM ÖNERİSİ

Kriz olmadan evrimleşmek ve dolayısıyla gelişimin olması zor, o nedenle krizlerden korkmamak gerekir!

Ali Törün'ün Bilim ve Gelecek Dergisi'nin Ocak 2018 sayısında yer alan “$\sqrt{2}$ Krizi” başlıklı yazısı[1] bir matematik kriziyle ilgiliydi. Bu yazının amacı, bahsedilen krizin, sadece matematiğin inşası için değil, bunun üzerinden “soyutlamanın inşası” için de bir fırsata dönüştürülmek suretiyle nasıl aşıldığına ilişkin olmakla birlikte, bununla sınırlı olmayacak; insanlığın çözüm getiremediği ve hiç alakasız bir başka kriz olan gelin-kaynana krizine değinilerek “yerli ve milli” çözüm önerilecek!.

Yazıda verilen matematiksel ifadelerin okunması esnasında bazı teknik ayrıntıların anlaşılması zor olabilir ancak kavram olarak ne denmek istenildiği kolaylıkla anlaşılabilir.

Sayı sistemleri

Çeşitli sayı sistemleri vardır; Doğal Sayılar Sistemi, Tam Sayılar Sistemi, Rasyonel Sayılar Sistemi. Bu sistemler belirli gereksinimler sonrasında inşa edilmiş olup, herbirinin elbette ilginç hikayeleri vardır. Örneğin negatif sayı kavramının ilk olarak Doğal Sayılar Sistemi'nde

$$1 + n = 0$$

benzeri eşitliği sağlayan bir n doğal sayısının[1] olamayacağı gözlemi ve gereksinimi sonucu ortaya çıkmış olması muhtemeldir. Bunun sonucunda Doğal Sayılar Sistemi'ni tamamlayan Tam Sayılar Sistemi adında bir sistem inşa edilmiştir. Aslında yapılan şey, her doğal sayının “zıttı”nın tanımlanmasından başka birşey olmadığı gibi, bir o kadar da doğal; “pozitif”e alacak ve “negatif”e borç anlamı yüklemek gibi bir durumdur. Tam sayılar sistemi

$$(\mathbb{Z}, +, ., 0, 1, \leqslant)$$

[1] ***Doğal sayılar kümesi***, $\mathbb{N}$ ile gösterilen $\{1, 2, 3, ...\}$ kümedir. Bu kümenin nasıl inşa edildiği bu yazının konusu olmayacak. Bu kümenin her elemanına ***doğal sayı*** denir. Doğal sayılarda tanımlı toplama ve çarpma işlemlerini ve sıralamanın ne olduğunu ve nasıl gösteridiğini okurun bildiği varsayılacak.

ile gösterilir. Burada $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesini, $+$ ve $.$, $\mathbb{Z}$'de tanımlı toplama ve çarpmayı, 0 ve 1, $\mathbb{Z}$'nin sıfır ve bir olarak adlandırılan elemanlarını ve $\leqslant$, $\mathbb{Z}$'de tanımlı sıralamayı gösterir. Okurun bu kavramları bildıigini varsayalım. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ olduğunu not edelim[2].

Tam Sayılar Sistemi'nin yetersizlikleri olmuştur. "Bir elma" ifadesinde yer alan "Bir " bir sayı olmasına karşın somut olarak varlığı ortada duran "yarım elma" ifadesinde yer alan "yarım"ın, sayı olmayı hak etmesi gerekmez mi? Bu yaklaşımla,

$$2m = 1$$

formunda bir denklemin Tam Sayılar Sistemi'nde çözülememesi Rasyonel Sayılar Sistemi'nin inşasını gerekli kılmıştır. Bunun sonucunda m, n iki tam sayı ve n sıfırdan farklı olmak üzere, $\frac{m}{n}$ biçiminde yazılan rasyonel sayılar tanımlanarak, yukarıda bahsedilen "yarım elma" ifadesinde yer alan yarım, matematik dilinde tanımlanıp $\frac{1}{2}$ ile gösterilmiştir. Rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ ile gösterilir. $\mathbb{Q}$'da toplama işlemi

$$\tfrac{m}{n} + \tfrac{a}{b} = \tfrac{bm+na}{nb}$$

olarak ve çarpma işlemi

$$\tfrac{m}{n}\tfrac{a}{b} = \tfrac{ma}{nb}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca bu tür sayılardan m ve n doğal sayı ise $\frac{m}{n}$'ye pozitif sayı denilerek, $\frac{m}{n} < \frac{a}{b}$ olması, $\frac{a}{b} + \frac{-m}{n}$ sayısının pozitif olması anlamındadır. Bu gösterim altında $\leqslant$ sıralaması

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x < y \text{ ya da } x = y$$

ifadesiyle tanımlanır ve

$$(\mathbb{Q}, +, ., 0, 1, \leqslant)$$

ifadesine Rasyonel Sayılar Sistemi denir. Buna göre: $1 = \frac{1}{1}$ ve $0 = \frac{0}{1}$.

m ve n doğal sayıları için, $m = kp$ ve $n = kt$ eşitliğini sağlayan k doğal sayısına m ve n'nin ortak böleni denir. x bir rasyonel sayı ise $x = \frac{m}{n}$ eşitliğini sağlayan ve ortak böleni sadece 1 olan m ve n sayılarının var olduğunu not edelim[3].

Yakınsak Diziler

Krizi anlayabilmek ve çözebilmek için onu ortamından uzaklaştırmakta yarar olabilir. "$\sqrt{2}$ krizi"ni de anlayabilmek için, Rasyonel Sayılar Sistemi'nin kılına bile zarar vermeden, dizi kavramına taşıyarak, kriz, dizi terimleriyle çözülecek. Bunun için bazı kavramları ve bunlarla ilgili gerekli temel kavramları verelim.

[2]$\mathbb{Z}$'nin inşasına bağlı olarak $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ olamayabilir ama böyle varsaymak problem oluşturmaz.

[3]Bu tür iki tam sayıya **aralarında asal** denir.

Doğal sayılar kümesinden bir X kümesine tanımlı her fonksiyona X-değerli dizi denir. Bu yazının konusu gereği çoğunlukla $\mathbb{Q}$ değerli dizilerle ilgilenileceğinden, aksi belirtilmediği sürece, dizi denilince $\mathbb{Q}$-değerli dizler kastedilecektir. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ dizisi, her n için $f(n) = (x_n)$ olmak üzere (x_n) biçiminde gösterilebilecek. Her m için, x_m'ye dizinin m'ninci terimi denir. $p \in \mathbb{Q}$ olmak üzere her terimi p olan dizi, (p) ile gösterilecek.

Dizilerin kümesi genelde olduğu gibi $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ ile gösterilir. İki dizinin toplamı ve çarpımı fonksiyonları sırasıyla

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$$

ve

$$(x_n)(y_n) = (x_n y_n)$$

eşitlikleriyle tanımlanır.

Bir (x_n) dizisinin bir p rasyonel sayısına yakınsaması, her $\varepsilon > 0$ rasyonel sayısı için $\{n : |x_n - p| > \varepsilon\}$ kümesinin sonlu olmasıdır[4]. Bu durumda

$$x_n \to p$$

gösterimini kullanacağız. $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ ise

$$x_n + y_n \to x + y \text{ ve } x_n y_n \to xy$$

olduğu kolayıkla gösterilebilir. Yakınsak dizilerin kümesini $c(\mathbb{Q})$ ile göstereceğiz.

$x_n - y_n \to 0$ özelliğindeki (x_n) dizisi (y_n) dizisine **denk** denir ve $(x_n) \equiv (y_n)$ ile gösterilir. Aşağıdakilerin sağlandığı kolaylıkla gösterilir.

i. $(x_n) \equiv (x_n)$.
ii. $(x_n) \equiv (y_n)$ ise $(y_n) \equiv (x_n)$.
iii. $(x_n) \equiv (y_n)$ ve $(y_n) \equiv (z_n)$ ise $(x_n) \equiv (z_n)$.

(x_n) dizisine denk olan dizilerin kümesine, bu dizinin denklik sınıfı denir ve $[(x_n)]$ ile gösterilir. Dizilerin denklik sınıflarının toplululuğu bir küme olup, $[\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}]$ ile gösterilecek.

$x_n \to p$ ve $(x_n) \equiv (y_n)$ ise $y_n \to p$ olduğu kolaylıkla gösterilir. İki dizinin denklik sınıfları birbirlerine eşit ya da arakesitleri boşkümedir. Yakınsak dizilerin denklik sınıflarının kümesini $[c(\mathbb{Q})]$ ile gösterelim. $x_n \to p$ ise $(x_n) \equiv (p)$ olduğunu da not edelim. Her $p \in \mathbb{Q}$ için $[(p)]$, $\mathbf{p}$ ile gösterilecek. Aşağıdaki teoremin kanıtı zor olmamalı.

[4]Sonlu küme kavramı başlı başına bir kavram olmasına karşın, bu kavramın detaylarına burada girmeyeceğiz. Ama bu kavram konusunda okurun sezgileri ve tahminleri yanıltıcı olmayacak. Ayrıca istenilen özellikteki p tektir.

Teorem 0.1. *$f(p) = \mathbf{p}$ eşitliğiyle tanımlı $f : \mathbb{Q} \to [c(\mathbb{Q})]$ fonksiyonu birebir ve örtendir. Ayrıca,*

$$f(p+q) = f(p) + f(q) \text{ ve } f(pq) = f(p)f(q)$$

eşitliği sağlanır.

Yukarıda bahsedildiği gibi, kriz Rasyonel Sayılar Sistemi'nin kılına zarar verilmeden dizilere taşınmış olundu.

Bu teorem rasyonel sayılar kümesinin yapısını yakınsak diziler kavramıyla anlamanının yolunu açıyor. "$\sqrt{2}$ krizi"ni anlamak ve krizi aşmak için, diziler kavramının elimizde önemli bir değer ve yeterli olduğu gösterilecek.

$\sqrt{2}$ krizi

Bu yazıda yer alan kriz ve bu krizin çözümü, Rasyonel Sayılar Sistemi'nde

$$x^2 = 2$$

denklemini sağlayan bir x sayısının, bir bakış açısıyla var, bir başka bakış açısıyla yok olmasının yarattığı karmaşıklık üzerinedir. Bahsi geçen kriz [1]'de ilginç yönleriyle ortaya konmuştur.

Rasyonel Sayılar Sistemi'nin yetmezliğinin farkına varıldığı nokta matematik tarihinin en büyük krizlerinden biri olmuştur: İki dik kenarının uzunluğu 1 birim olan bir üçgenin varlığı son derece "doğal" olmasına karşın üçüncü kenarın uzunluğu, rasyonel sayı sisteminin dışında olduğundan (neden?), "doğal" değildir. Bu kriz sonrası gelişen soyutlama kavramı belki de insanı insan yapan bir değer olup, bu süreç içerisinde reel sayılar sistemi inşa edilmiştir.

Yukarıda bahsedilen krize neden olan "sayı", dik kenarları bir birim olan bir dik üçgende, Hipotenis Teorem'ini kullanarak, kenarlar arasında

$$1^2 + 1^2 = x^2$$

eçitliğini sağlayan sağlayan üçgenin diğer kenar uzunluğu olan x sayısı olur. Üçgenin kenar uzunluğu negatif olamayacağından $x \geqslant 0$ eşitsizliği de sağlanır. Diğer taraftan böyle bir sayı, yani rasyonel sayı yoktur. Gerçekten olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$x^2 = 2 \text{ ve } x = \tfrac{m}{n}$$

olacak biçimde aralarında asal m ve n doğal sayıları vardır. Buradan

$$2 = \tfrac{m^2}{n^2}$$

ve dolayısıyla

$$m^2 = 2n^2$$

olur. m^2 bir çift sayıdır ve karesi çift olan sayının kendisi çift olacağından m'de bir çift sayıdır ve dolayısıyla

$$m = 2k$$

olacak biçimde k doğal sayısı vardır. $m^2 = 2n^2$ eşitliğinde $m = 2k$ yazarak

$$4k^2 = 2n^2$$

ve buradan da

$$2k^2 = n^2$$

elde edilir. Benzer nedenlerden n'de bir çift sayı olup

$$m = 2p$$

olacak biçimde p doğal sayısı vardır. Elde edilenler 2'nin m ve n'nin ortak böleni olduğunu söyler. Bu çelişki olup, istenileni kanıtlar.

Yukarıdaki paragrafta dik kenarları bir birim olan olan üçgenin hipotenüs uzunluğu geometrik olarak var olmasına karşın (bu sayıyı $\sqrt{2}$ ile gösterelim) rasyonel sayı olarak yoktur. Bir sayının hem var olmasının (geometrik olarak) hem de olmamasının (cebirsel olarak) yarattığı bu çelişkili durum, inşa edilecek bir sistem ile giderilecek. Bu sistemin anlı şanlı adı Reel Sayılar Sistemi'dir.

"$\sqrt{2}$ olsaydı nasıl olurdu"yu anlama girişimi

"$x^2 = 2$" eşitliğini var yapan x, Rasyonel Sayılar Sistemi dünyasında yok olmasına karşın var olduğu bir başka sistem olsa nasıl olurdu? O sistemde yeri yurdu nasıl olurdu? Kırmızı şapkası olur muydu? Hayırlı mı yoksa hayırsız mı olurdu? soruları üzerine hayal kurmanın, bir başka sisteme yelken açma girişiminin, düşünmenin ve bunun sonucu olarak belki de insan olabilmenin gereğidir.

Geometrik olarak var olan $\sqrt{2}$ sayısının var olduğunu, bir üçgenin resmini çizebildiğimiz kadar biliyoruz. Bu sayı[5] rasyonel olarak olmasa da Rasyonel Sayılar Sistemi'nin yapısını bozmadan bu sistemi kapsayan ve $x^2 = 2$ eşitliğini sağlayan pozitif x sayısını içeren bir sistem var ise bu sistem içerisinde x sayının nasıl davranması gerektiğini anlamalıyız. Elde edilen tespitlerin bu sayıyı tanımlamak için yeterli olup olmadığını kontrol etmeliyiz. Bir an için böyle bir sistemin, $\mathbb{Q}$'nun yapısına zarar vermeden "uyumlu" ve $x^2 = 2$ eşitliğini sağlayan ve $\sqrt{2}$ ile gösterilen sayıyı içerdiğini varsayalım.

Bu sistem içerisinde $\sqrt{2}$ sayısı iki rasyonel sayı arasında yer alır. Örneğin, 1 ve 2 arasında bir sayıdır. Daha açık olarak,

$$1^2 < 2 = \sqrt{2}^2 < 2^2$$

[5] aslında henüz bir sayı değil

eşitsizliğinden

$$1 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 2$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik bize rasyonel sayılarla $\sqrt{2}$'ye yaklaşmanın yolunu açar. İlk yaklaşım,

$$1 \leqslant \sqrt{2} \leqslant \tfrac{3}{2}$$

ya da

$$\tfrac{3}{2} \leqslant \sqrt{2} \leqslant 2$$

olur. İkincisi olmayacağından birincisi gerçekleşir, yani,

$$1 \leqslant \sqrt{2} \leqslant \tfrac{3}{2}$$

olmak zorundadır. Bu aralıktan, yani

$$1 \leqslant x_1 \leqslant \tfrac{3}{2}$$

olacak biçimde x_1 rasyonel sayısını seçelim. $[1, \frac{3}{2}]$ aralığını iki eşit aralığa ayıralım. Bu aralıklardan biri $\sqrt{2}$'yi içerir ve bu aralıktan da x_2 rasyonel sayısı seçelim. Bu şekilde devam ederek bir (x_n) dizisi elde edilir. Bu dizinin bazı temel özellikleri vardır:

Birinci özellik: yakınsak bir dizi değildir, yani "her $\varepsilon > 0$ rasyonel sayı için

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$$

olacak biçimde n_0 doğal sayısı var" ifadesini doğrulayan bir x rasyonel sayısı yoktur, olsaydı x sayısı $\sqrt{2}$ olurdu ki bu çelişkidir.

İkinci özellik: $(x_n - x_m)$ ikili dizisi sıfıra yakınsar; yani verilen her $\varepsilon > 0$ rasyonel sayısı için,

$$n, m \geqslant n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

olacak biçimde n_0 doğal sayısı vardır.

Üçüncü özellik: p ve q, $p < \sqrt{2} < q$ olacak biçimde p ve q rasyonel sayıları için,

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow p < x_n < q$$

olacak biçimde n_0 tam sayısı vardır.

Her ne kadar $\sqrt{2}$ rasyonel sayı olmasa da bu sayıdan beklentilerimiz yukarıda seçilen (x_n) dizisi üzerinden belirlenebilir ve karşılanabilir. Yani, ufak tefek ayarlamalarla $\sqrt{2}$ yerine (x_n) dizisi alınabilir ama bu durumda ortaya teklik problemi çıkacaktır. Bunun için şu özelliği görelim.

Dördüncü özellik: (a_n) rasyonel sayıların bir dizisi ve p ve q, $p < \sqrt{2} < q$ olacak biçimde p ve q rasyonel sayıları için,

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow p < a_n < q$$

olacak biçimde n_0 doğal sayısı varsa $(x_n - a_n)$ dizisi sıfıra yakınsar.

Yukarıdaki gözlem bizi $\sqrt{2}$ sayısı (x_n) dizisiyle mi yoksa (a_n) dizisiyle mi temsil edilmeli sorusuna yöneltir. Aslında bu iki diziyi de $\sqrt{2}$ sayısını temsil etme anlamında denk olarak ele alalım ve bu durumu $(x_n) \equiv (a_n)$ ile gösterelim. Ayrıca (x_n) dizisine denk olan dizilerin kümesini $[(x_n)]$ ile gösterelim. Yukarıda sorulan "...nasıl olurdu?" sorusunun yanıtı şöyle olurdu.

Tanım 0.2. $[(x_n)]$ *denklik sınıfına (Cauchy anlamında)* $\sqrt{2}$ *denir.*

Yukarıda verilen tanım gereği.

$$[(x_n)] = \sqrt{2}$$

yazabiliriz. Bu tanımlamayla bahsedilen kriz çözülmüş olmamakla birlikte çözüme yönelik işaretler ortaya çıkıyor.

Her n için ${x_n}^2 < 2$ ya da $2 < {x_n}^2$ olur. Üstelik $\{n : x_n^2 < 2\}$ ya da $\{n : 2 < x_n^2\}$ kümelerinden biri sonsuzdur. Birinci kümenin sonsuz olma durumunda

$$x_{n_1} < x_{n_2} < ...$$

ve

$$[(x_{n_k})] = \sqrt{2}$$

olacak biçimde (x_{k_n}) dizisi vardır. İkinci durumun gerçekleşmesi durumunda da

$$x_{n_1} > x_{n_2} > ...$$

ve

$$[(x_{n_k})] = \sqrt{2}$$

olacak biçimde (x_{n_k}) dizisi vardır. Aslında daha fazlasının da doğru olduğu gösterilecek:

$$a_1 < a_2 < ... \text{ ve } b_1 > b_2 > ...$$

ve

$$[(a_n)] = [(b_n)] = \sqrt{2}$$

olacak biçimde (a_n) ve (b_n) dizileri vardır.

Yakınsamaya çalışan diziler

$(x_n) \in c(\mathbb{Q})$ ise her $\varepsilon > 0$ için $\{(n,m) : |x_n - x_m| > \varepsilon\}$ kümesinin sonlu olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu durum $\lim_{n,m\to\infty}(x_n - x_m) = 0$ olarak gösterilir. Bunun tersi genelde doğru olmayabilir, yani $\lim_{n,m\to\infty}(x_n - x_m) = 0$ özelliğini sağlayan (x_n) dizisinin yakınsak olması gerekmez.

$$a_n^2 \to 2 \text{ ve } b_n^2 \to 2$$

ise

$$a_n - b_n \to 0$$

olduğu kolaylıkla gösterilir. Bunun bir sonucu olarak, terimleri pozitif olan bir (a_n) dizisinin

$$[(a_n)] = \sqrt{2}$$

eşitliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul

$$a_n^2 \to 2$$

olmasıdır. Ayrıca bu denk koşulların birinin gerçekleşmesi durumunda

$$\lim_{n,m\to\infty}(a_n - a_m) = 0$$

eşitliği sağlanır. Ancak bu dizi yakınsak olamaz. Gerçekten, $a_n \to p$ olacak biçimde $p \in \mathbb{Q}$ olsaydı, $a_n^2 \to p^2$ olur ve aynı zamanda $a_n^2 \to 2$ olduğundan $p^2 = 2$ (Neden?) elde edilirdi. Bu ise bizim krizimizdi. Bu gözlem sonucu aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 0.3. $\lim_{n,m\to\infty}(a_n - a_m) = 0$ *eşitliğini sağlayan* (a_n) *dizisine* ***Cauchy dizisi*** *denir.*

Her n için $x_n \leqslant x_{n+1}$ özelliğindeki diziye **artan dizi** denir. Her n için $x_n \leqslant p$ olacak biçimde p rasyonel sayısı varsa, (x_n) dizisine **üstten sınırlı** denir. Artan ve üstten sınırlı dizinin Cauchy olduğunu göstermek zor değildir. Bu özellik, reel sayılar çalışılırken rahatlatıcıdır. Benzer biçimde azalan ve alttan sınırlı dizi tanımlanır. Azalan ve alttan sınırlı diziler de Caucyh dizisidir. Özellik olarak her p rasyonel sayısı için (p) dizisi Cauchy dizisidir.

Tanım gereği $\sqrt{2}$, bir Cauchy dizisinin denklik sınıfıdır. Bu durum $\sqrt{2}$ krizinin Cauchy Dizileri kullanılarak aşılabileceğinin işaretini verebilir. O halde Cauchy dizlerinin yapısını anlamakta yarar var. Bütün Cauchy dizilerinin topluluğunu $\mathcal{C}$ ile gösterelim. Yani,

$$\mathcal{C} = \{(a_n) : \lim_{n,m\to\infty}(a_n - a_m) = 0\}$$

olsun. $\mathcal{C} \subset \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ olduğundan bir kümedir. İki Cauchy dizisinin $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$'de tanımlanan toplamı ve çarpımı birer Cauchy dizisidir. Yani (a_n), $(b_n) \in \mathcal{C}$ ise, $(a_n + b_n)$ ve $(a_n b_n)$ dizileri Cauchy dizileridir.

Elemanları bir Cauchy dizisinin denklik sınıfı olan kümeyi $[\mathcal{C}]$ ile gösterelim. $[\mathcal{C}]$'de toplama ve çarpma işlemleri sırasıyla

$$[(a_n)] + [(b_n)] = [(a_n + b_n)]$$

ve

$$[(a_n)][(b_n)] = [(a_n b_n)]$$

olarak tanımlansın. Şu anda elde edilen $([\mathcal{C}], +, [(0)], [(1)])$ beşlisinin aradığımız sistem olduğunu göstereceğiz.

(x_n), sıfıra yakınsamayan bir Cauchy dizisi ise

$$\{n : x_n < -\varepsilon\} \text{ ve } \{n : x_n < -\varepsilon\}$$

kümelerinden biri sonsuz ve diğeri sonlu olan bir $\varepsilon > 0$ rasyonel sayısı vardır. Birinci kümenin sonsuz olma durumunda, $[(x_n)] = [(a_n)]$ ve her n için $a_n < -\varepsilon$ olacak biçimde (a_n) Cauchy dizisi vardır. İkinci durumda $[(x_n)] = [(a_n)]$ ve her n için $a_n > \varepsilon$ olacak biçimde (a_n) Cauchy dizisi vardır. Ayrıca,

$$[\mathcal{C}]^+ = \bigcup_m (\{[(a_n)] : (a_n) \in \mathcal{C}, \quad \forall n, a_n > \tfrac{1}{m}\}$$

ve

$$[\mathcal{C}]^- = \bigcup_m (\{[(a_n)] : (a_n) \in \mathcal{C}, \quad \forall n, a_n < -\tfrac{1}{m}\}$$

olarak tanımlanan kümeler ayrıktır ve $\mathbf{0} = [(0)]$ elemanını içermezler. Sonuç olarak,

Teorem 0.4. $[\mathcal{C}] = [\mathcal{C}]^+ \cup [\mathcal{C}]^- \cup \{[(0)\}$ *olur.*

İnşa sürecindeki notasyonlar, yaygın kullanım dilinde farklılıklar gösterir. $[\mathcal{C}]^+$ kümesi $\mathbb{R}^+$, $[\mathcal{C}]^+$ kümesi $\mathbb{R}^-$ ve $[\mathcal{C}]$ kümesi $\mathbb{R}$ olarak gösterilir.

$$\{\mathbf{p} : p \in \mathbb{Q}, p > 0\} \subset \mathbb{R}^+ \text{ ve } \{\mathbf{p} : p \in \mathbb{Q}, p > 0\} \subset \mathbb{R}^+$$

olur. $x \in \mathbb{R}^+$ olması, $x > 0$ ya da $0 < x$ ile gösterilir. $0 < y - x$ olması durumunda $x < y$ yazılır.

Tanım 0.5. *$\mathbb{R}$'de "$x \leqslant y \iff x = y$ ya da $x < y$" olarak tanımlanan kısmi sıralama*[6] *$\leqslant$ bir tam sıralamadır.*

Aşağıdaki birkaç gözlemi yapalım:

i. $\mathbb{R}$'de $x > 0$ olması için gerek ve yeter koşulun $x > \mathbf{p}$ olacak biçimde $p > 0$ rasyonel sayısının olmasıdır.
ii. $x = [(x_n)] > 0$ ise her $n > m$ için $x_n > 0$ olacak biçimde m vardır.
iii. p ve q rasyonel sayıları için $p < q$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{p} < \mathbf{q}$ olmasıdır.
iv. Her $x \in \mathbb{R}$ için $\mathbf{m} < x < \mathbf{n}$ olacak biçimde m ve n tamsayıları vardır: Cauchy dizisinin sınırlı olmasından hemen elde edilir.

[6]Yani, her x, y ve x için i. $x \leqslant x$ ii. $x \leqslant y$ ve $y \leqslant x$ ise $x = y$, iii. $x \leqslant y$ ve $y \leqslant z$ ise $x \leqslant z$ koşulları sağlanır.

v. $x,\ y \in \mathbb{R}$ verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $y \leqslant \frac{1}{n}x$ ise $y \leqslant 0$ olur: $0 < y$ olduğunu varsayalım. $0 < \varepsilon < y \leqslant \frac{1}{n}x \leqslant \frac{1}{n}m$ olacak biçimde $0 < \varepsilon \in \mathbb{Q}$ ve $m \in \mathbb{N}$ seçelim. Buradan her n için $\mathbb{Q}$'da $\varepsilon\frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{n}$ olur. Buradan da $\varepsilon\frac{1}{m} < 0$ çelişkisi olur.

vi. $\mathbb{Q}$'da $p < q$ ise $\mathbf{p} < x < \mathbf{q}$ olacak biçimde $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ vardır: $[(x_n)] = \sqrt{2}$ olmak üzere,

$$x = [(p + \tfrac{q-p}{2}x_n)]$$

alınabilir.

vii. $\mathbb{R}$'de $x < y$ ise $x < \mathbf{p} < y$ olacak biçimde $p \in \mathbb{Q}$ var: Önce $0 < x$ olduğunu varsayalım. $y - x > 0$ olduğunda $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} < y - x$ olacak biçimde n doğal sayısı var. Ayrıca $\{m \in \mathbb{N} : \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} < x\}$ kümesi üstten sınırlı olduğundan m, bu kümenin en büyük elemanı olmak üzere, $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} < x < \frac{\mathbf{m+1}}{\mathbf{n}}$. Buradan da

$$x < \frac{\mathbf{m+1}}{\mathbf{n}} < y$$

elde edilir. x ve y'nin diğer olası durumları için de istenilen benzer biçimde gösterilir.

viii. Yukarıdaki gözlemden

$$\mathbb{R} = \{[(x_n)] : (x_n) \text{ artan ve üstten sınırlı } \}$$

olduğu gösterilebilir. Benzer biçimde

$$\mathbb{R} = \{[(x_n)] : (x_n) \text{ azalan ve alttan sınırlı } \}$$

olur.

Reel Sayılar Sistemi'nin farklı inşası ve tarihsel bilgilere [2]'den ulaşılabilir.

$\mathbb{R}$'nin tamlığı

Rasyonel Sayı Sistemi ile Gerçel Sayılar Sistemi arasındaki farkı belirleyen "Dedekind tam olma" durumudur. Rasyonel Sayı Sistemi'nin Dedekind tam olmadığı ve Reel Sayılar Sistemi'nin Dedekind tam olduğu gösterilecek.

Tanım 0.6. *$A \subset \mathbb{R}$ boş olmayan bir küme ve $x \in \mathbb{R}$, aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, x'e A'nın supremumu (en küçük üst sınırı) denir.*

i. *A'nın üst sınırı, yani her $a \in A$ için $a \leqslant x$.*
ii. *y, A'nın üst sınırı ise $x \leqslant y$.*

Benzer biçimde A'nın **alt sınırı** ve en **büyük üst sınırı (infimumu)** tanımlanır. x, A'nın üst sınırı ise $A \leqslant x$ gösterimi ve supremumu ise $x = \sup A$ yazılır. Benzer biçimde, altsınırı ise altsınırı ise $x \leqslant A$ ve infimumu ise $x = \inf A$ yazılır.

Teorem 0.7. *$\mathbb{R}$'nin üstten sınırlı her alt kümesinin supremumu vardır.*

Proof. $A \subset \mathbb{R}$ ve $b \in \mathbb{R}$, A'nın üst sınırı olsun. A'nın supremunun olmadığını varsayalım. $a \in A$ seçelim. y_1, a ve b noktalarının orta noktası olsun. A'nın supremumu olmadığından $(a, b] \cap A$ boşküme olamaz. Dolayısıyla $A_{1,1} = (a, y_1] \cap A$ ve $A_{1,2}(y_1, b] \cap A$ kümelerinin her ikisi birden boşküme olamaz. $A_{1,2}$ boşkümeden farklıysa $a_1 \in A_{1,2}$ seçelim. Eğer $A_{1,2}$ boşküme ise $a_1 \in A_{1,1}$ olarak seçilsin. Böylece $a_1 \in A_{1,i_1}$ seçebiliriz. Ayrıca $A \leqslant z_1 \leqslant b$ ve

$$a_1 \leqslant a \in A \Longrightarrow 0 \leqslant z_1 - a \leqslant \tfrac{1}{2}$$

olacak biçimde A'nın üst sınırı z_1 var. Benzer biçimde y_2, a_1 ve z_1'in orta noktası olsun. $A_{2,1} = (a_1, y_1] \cap A$ ve $A_{2,2} = (y_1, z_1] \cap A$ kümelerinin her ikisi birden boşküme olamaz. $A_{2,2}$ boşkümeden farklı ise $a_2 \in A$, $A_{2,2}$'den, eğer boşküme ise $A_{2,1}$ kümesinden seçilsin. Böylece $a_2 \in A_{2,i_2}$ seçeriz. Ayrıca $A \leqslant z_2 \leqslant z_1$ ve

$$a_2 \leqslant a \in A \Longrightarrow 0 \leqslant z_2 - a \leqslant \tfrac{1}{2^2}$$

olacak biçimde A'nın üst sınırı vardır. Bu yöntemi kullanarak, tümevarımla aşağıdaki koşulları sağlayan A'da (a_n) dizisi ve $\mathbb{R}$'de (z_n) dizileri vardır.

i. (a_n) kesin artan, yani her n için $a_n < a_{n+1}$.
ii. Her n için z_n, A'nın bir üst sınırı ve $z_{n+1} \leqslant z_n$.
iii. $a \in A$ ve $a_n \leqslant a$ ise $0 \leqslant z_n - a \leqslant \frac{1}{2^n}$ olur.

Bu durumda bir $x \in \mathbb{R}$'nin A'nın üst sınırı olması için gerek ve yeter koşul $B = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin üst sınırı olmasıdır. A'nın supremumu olmadığı varsayımından B'nin supremumu yoktur. Diğer taraftan her n için $a_n < q_n < a_{n+1}$ olacak biçimde rasyonel q_n vardır. (q_n) dizisi artan ve üstten sınırlıdır ve dolayısıyla Cauchy dizisidir. $s = [(q_n)]$ diyelim. s'nin B kümesinin supremumu olduğu kolaylıkla gösterilir. A ve B'nin üst sınırlarının kümesi eşit olduğundan, s aynı zamanda A'nın supremumu olur ki bu çelişkidir. Çelişkiye neden olan A'nın supremunun olmadığı varsayımıdır. O halde A'nın supremumu vardır. □

Gerçel sayılar sisteminde bir x sayısının mutlak değeri, $x > 0$ ise $|x| = x$ ve diğer durumda $|x| = -x$ olarak tanımlanır. Aşağıdaki teoremin kolay bir uygulanmasıyla aşağıdaki teorem kanıtlanır.

Teorem 0.8. *$\mathbb{R}$'de verilen (x_n) dizisi için aşağıdakiler denktir.*

i. *Her $\varepsilon > 0$ için $\{(n, m) : |x_n - x_m| > \varepsilon\}$ kümesi sonlu.*

ii. *Öyle bir $x \in \mathbb{R}$ var ki her, her $\varepsilon > 0$ için $\{n : |x_n - p| > \varepsilon\}$ kümesi sonlu.*

Bu teoremde (i) koşulunun sağlanması durumunda (x_n) dizisine $\mathbb{R}$'de **Cauchy**, ikinci koşulun sağlanması durumunda (x_n) dizisi x'e yakınsar denir. Yaygın olarak şu s oylenir: Gerçel Sayılar Sistemi tamdır. Bu özellik Rasyonel Sayılar Sistemi'nde yoktur.

"$\sqrt{2}$ Krizi"nin epey bir çözümü

"$\sqrt{2}$ olsaydı nasıl olurdu?" sorusu Tanım 4.1 ile yanıtlanmıştır. Aynı sorunun yanıtı başka türlü de verilebilir.

Teorem 0.9. $\sqrt{2} = \sup\{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$.

Proof. . $S = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$ kümesi 1 sayını içerdiğinden boşkümeden farklı ve üstten sınırlı olduğundan $x = \sup S$ vardır. $0 < x$ olduğu bariz. $x^2 = 2$ olduğunu göstermek kanıtı tamamlar. $x^2 < 2$ olduğunu varsayalım. $\frac{2-x^2}{2x+1} > 0$ olduğundan $\frac{1}{n} < \frac{2-x^2}{2x+1}$ olacak biçimde $n \in \mathbb{N}$ seçebiliriz. Buradan $\frac{2x+1}{n} < 2 - x^2$ olur.

$$(x - \tfrac{1}{n})^2 = x^2 - \tfrac{2x}{n} + \tfrac{1}{n}^2 \leqslant x^2 + \tfrac{1}{n}(2x + \tfrac{1}{n}) < x^2 + (2 - x^2) = 2$$

olmasından $x - \frac{1}{n} \in S$ olur ki bu çelişkidir. O halde $x^2 \geqslant 2$ olur. $x^2 > 2$ olduğunu varsayalım. $\frac{1}{n} < \frac{x^2-2}{2x+1}$ olacak biçimde n seçelim. Buradan da

$$(x - \tfrac{1}{n})^2 = x^2 - \tfrac{2x}{n} + \tfrac{1}{n^2} > x^2 - \tfrac{2x}{n} > x^2 - (x^2 - 2) = 2$$

olur. Buradan da $(x - \frac{1}{n})^2 > x^2$ çelişkisi elde edilerek kanıt tamamlanır. □

Sıralı halka ve cisim

Dikkate edilirse Gerçel Sayılar Sistemi'nin inşa sürecinde yakınsama kavramı kullanıldı. Bu yaklaşım, matematiğin bir dalı olan analizin yöntemidir. Analiz yöntemi kullanılarak inşa edilen Gerçel Sayılar Sistemi'nin matematiğin bir başka dalı olan cebirde, Tam Sıralı Cisim olarak adlandırılan karşılığı vardır. Bu alt bölümde Reel Sayılar Sistemi'nin tam sıralı cisim olduğunu göstermekle kalmayacağız, sadece ve sadece tek bir tane sıralı cisim olduğu gösterilecek. sadece ve sadece tek bir tane tam sıralı cismin olduğunu göstereceğiz. Böylece cebirsel aksiyomlarla Reel Sayılar Sistemi'nin sınırları çizilecek.

Eğitsel dili zorlaştırmadan ve okuru panikletmeden bazı temel kavram ve sonuçları kanıtsız olarak verelim.

X boş olmayan bir küme ve $*$, $X \times X$'den X'e tanımlı bir fonksiyon olsun. $*(a, b)$ yerine $a * b$ yazalım. $(X, *)$ ikilisi, $*$ bir cebisel işlem olarak adlandırılmak üzere, sağladığı belirli koşullara göre aşağıdaki gibi isimlendirilir:

1. Her a, b, $c \in X$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ ise **yarıgrup**,
2. Yarıgrup ve her $a \in X$ için $a * e = e * a$ olacak biçimde $e \in X$ varsa ***monoid***. Bu durumda e'ye birim denir.
3. Monoid ve her $a \in X$ için $a * b = b * a = e$ olacak biçimde $b \in X$ varsa ***grup***. Bu özellikteki b tek olup, a'nın ***tersi*** denir ve a^{-1} ile gösterilir.
4. Grup ve her a, $b \in X$ için $a * b = b * a$ oluyorsa **değişmeli grup**.

Bir karmaşa olmadığı sürece farklı iki küme üzerinde cebirsel işlemler aynı simge ile gösterilebilir. Örneğin, $(X, +)$ ve $(Y, +)$ ikilisinde kullanılan $+$ işlemeleri aynı olmayabilir. $(X, *)$ ikilisine $Y \subset X$ olmak üzere her a, $b \in Y$ için $a * b \in Y$ oluyorsa, Y, $*$ işlemine göre **kapalı** denir.

R, boş olmayan bir küme ve $+$, $.$, $R \times R$'den R'ye iki fonksiyon olmak üzere, $(R, +, ., 0)$ dörtlüsüne, $a.b$ yerine ab yazmak üzere, ***halka*** denir.

i. $(R, +, 0)$ değişmeli grup.
ii. $(R, .)$ yarıgrup.
iii. Her x, y, $z \in R$ için

$$x(y + z) = xy + xz \text{ ve } (x + y)z = xz + yz.$$

Ayrıca,

iv. her $r \in R$ için $1a = a1 = a$ olacak biçimde $1 \in T$ varsa, 1'e R'nin **birimi** denir ve bu durumda halka $(R, +, ., 0, 1)$ ile gösterilir.
iv. her a, $b \in R$ için $ab = ba$ oluyorsa, **değişmeli halka** denir.

Bu yazıda halkanın değişmeli, birimli ve sıfırdan farklı olduğunu kabul edeceğiz. $(R, +, ., 0, 1)$ halkasında $+$ işlemine toplama ve $.$ işlemine **çarpma** denir. $x \in R$ elemanın $(R, +, 0)$ grubuna göre tersi $-x$ ile gösterilir. $-(-x) = x$ olduğu kolaylıkla gösterilir. $x - y$ ifadesi $x + (-y)$ anlamında ve $-x + y$, $(-x) + y$ anlamındadır.

$(R, +, ., 0, 1)$ halkasına, $(R \setminus \{0\}, ., 1)$ bir grup ise, ***cisim*** denir.

Sayı sistemleri üzerinden bazı örnekler verelim.

a. $(\mathbb{N}, +)$ yarıgrup ama monoid değil.
b. $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ monoid ama grup değil.
c. $(\mathbb{Z}, +, ., 0, 1)$ halka ama cisim değil.
d. $(\mathbb{Q}, +, ., 0, 1)$ cisim.

d. $([c(\mathbb{Q})], +, ., 0, 1)$ cisim.

d. $(\mathbb{R}, +, ., 0, 1)$ cisim.

İki halkanın aynılığı, aralarında tanımlı ve halka izomorfizma olarak adlandırılan bir fonksiyonun varlığı ile verilir. $(R, +, ., 0)$ ve $(S, +, ., 0)$ iki halka olmak üzere

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ ve } f(xy) = f(x)f(y)$$

eşitliğini sağlayan f fonksiyonuna **halka homomorfizma** denir. Bu durumda $(f(X), +, ., 0, 1)$ bir halkadır. Ayrıca f birebir ise, R, S'ye **halka gömülebilir** denir. Bir anlamda, R'yi S'nin $+$ ve . işlemlerine göre kapalı alt kümesi gibi görebiliriz. Üstelik f birebir ve örten ise S ve R halkalarına aynı olarak bakarız. Matematiksel dilde **halka izomorfik** denir. $(\mathbb{Q}, +, .)$ ve $([c(\mathbb{Q})], +, ., 0, 1)$ halkaları, $p \to \mathbf{p}$ dönüşümünün varlığı nedeniyle izomorfik olduklarından, halka kavramında $[c(\mathbb{Q})] = \mathbb{Q}$ yazmak yerinde olacaktır. Buna karşın, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (halka gömülebilir anlamında) olmakla birlikte bu iki halka aynı değillerdir, olsaydı $\mathbb{R}$ çözülebilen $x^2 = x$ denklemi $\mathbb{Q}$'da da çözülürdü. Daha matematiksel bir ifadeyle, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ halka izomorfizmasının var olduğunu varsayalım. Biraz uğraşla,

$$2 = f(2) = f(\sqrt{2}^2) = (f(\sqrt{2}))^2$$

çelişkisi elde edilir.

$(R, +, ., 0, 1)$ bir halka ve $x \in R$ verilsin. $1 \in \mathbb{N}$ için $1 \odot x = x$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $n \odot x$ tanımlandığında $(n+1) \odot x = (n \odot x) + x$ olarak tanımlanarak tümevarımla her $n \in \mathbb{N}$ için $n \odot x$ tanımlanmış olur. Ayrıca $0 \odot x = 0$ ve $n < 0$ tamsayısı için $n \odot x = -((-n) \odot x)$ olmak üzere her $n \in \mathbb{Z}$ için $n \odot x$ tanımlanmış olur. Kolaylık açısından $n \odot x$ yerine nx yazıp, $\mathbb{Z}x = \{nx : n \in \mathbb{Z}\}$ gösterimi kullanılır. $(\mathbb{Z}x, +, ., 1)$ bir halkadır. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $n' = n1$ olmak üzere $n \neq m$ için $n' \neq m'$ oluyorsa $\mathbb{Z}1$ ve $\mathbb{Z}$ halka izomorfiktirler. Bu durumda $\mathbb{Z}1$'ye R'nin tamsayıları denir ve $R_{\mathbb{Z}}$ ile gösterilir. R bir cisim ve $0 \neq n1 \in R_{\mathbb{Z}}$ ise $(n1)^{-1}$, n' ile göstererek $(m1)(n1)^{-1}$ yerine $\frac{m'}{n'}$ yazılım. $R_{\mathbb{Q}} = \{\frac{m'}{n'} : m.n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$, bir halka olup $\mathbb{Q}$'ya halka izomorfiktir. $R_{\mathbb{Q}}$'ya R'nin rasyonel sayılar kümesi denir.

Yukarıda verilen halka örneklerinin her birinde bir tam sıralama "$\leqslant$" var. Dolayısıyla bu sıralamayı da hesaba alarak bahsedilen sayı sistemlerine bu sıralamaları koymak gerekir. Bu sıralamaların cebirsel işlemlere olan etkisini bir genellik içinde anlamak yerinde olacaktır.

$(R, +, ., 0, 1)$ bir halka ve $\leqslant$, R'de bir tam sıralama olsun. Aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa $(R, +, ., \leqslant, 0, 1)$'ya **sıralı halka** denir. Sıralı halka cisim ise, **sıralı cisim** denir.

i. $x \leqslant y$ ise her $x \in R$ için $x + z \leqslant y + z$.
ii. $0 < x$ ve $0 < y$ için $0 < xy$.

$(R, +, ., 0, 1, \leqslant)$ sıralı halkası için aşağıdakiler gerçekleşir:

iii. $-1 < 0$ ve $0 < 1$: Olmadığı durumda $-1 \neq 0$ olduğundan $0 < -1$ olur. Buradan da

$$0 < -1 \Longrightarrow 0 < (-1)(-1) = 1 \Longrightarrow -1 < 0$$

çelişkisi oluşur. Benzer biçimde $0 < 1$ our.

iv. R'nin tamsayılar kümesi $R_{\mathbb{Z}}$ sonsuz ve tamsayılar halkasına izomorfiktir.
v. R sıralı cisim ise R'nin rasyonel sayılar halkası $R_{\mathbb{Q}}$ ve rasyonel sayılar halkası izomorfiktirler.
vi. Her $x \in R$ için $x^2 \geqslant 0$: $x = 0$ ise istenen açık. Diğer durumda $x > 0$ ya da $x < 0$ olur. Birinci durumda aksiyom gereği, $0 < x < 2$, ikinci durumda $0 < -x$ olacağından $0 < (-x)(-x) = x^2$ olur.
vii. $x > 0$ ve a, x'in tersi ise, yani $1 = ax = xa$ ise $a > 0$: $a \leqslant 0$ olduğunu varsayalım. $0 < -a$ olur. Buradan $0 < (-a)x = -(ax) = -1$ olur ki bu çelişki olur.

Reel Sayılar Sistemi'nin cebirsel sınırı

Reel Sayılar Sistemi'nde tanımlandığı gibi $(R, +, ., 0, 1, \leqslant, \leqslant)$ sıralı cismi içinde bir kümenin üst sınırı, alt sınırı, supremum ve infimumu tanımlanır. R'nin üstten sınırlı her alt kümesinin en küçük üst sınırı varsa **tam sıralı cisim** denir.

1. $(\mathbb{Q}, +, ., 0, 1, \leqslant)$ sıralı cisim ama tam sıralı değildir.
2. $(\mathbb{R}, +, ., 0, 1, \leqslant)$ tam sıralı cisimdir. Bunun tersi de doğrudur. Yani:

Teorem 0.10. $(R, +, ., 1, 0, \leqslant)$ *tam sıralı cisim ise* $(\mathbb{R}, +, ., 0, 1, \leqslant)$ *tam sıralı cismine izomorfiktir. Yani, birebir, örten ve her* $x, y \in R$ *için,*

i. $f(x + y) = f(x) + f(y)$
ii. $f(xy) = f(x)f(y)$
iii. $x < y$ *olması için gerek ve yeter koşul* $f(x) < f(y)$

eşitliğini sağlayan $f : R \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu vardır.*

Proof. . Kanıtı detaylara girmeden verelim. $R_{\mathbb{Q}} = \{\frac{m'}{n'} : m, n \in \mathbb{Q}, m \neq 0\}$ olmak üzere, $(\mathbb{Q}, +, \leqslant, ., 0, 1)$ ve $(\mathbb{Q}_R, +, \leqslant, ., 0, 1)$ sıralı cisimleri,

$$\frac{m}{n} \to \frac{m'}{n'}$$

dönüşümü altında izomorfiktirler. $f : \mathbb{R} \to R$ fonksiyonu, $f(0) = 0$ olmak üzere, $x > 0$ için $\{g(r) : r \leqslant x\} \subset R$ kümesinin üstten sırlı olduğu dikkate alarak, $x > 0$ için

$$f(x) = \sup\{g(r) : r \leqslant x\},$$

ve $x < 0$ için $f(x) = -f(-x)$ olarak tanımlansın. f'nin halka homorfizma ve "$x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$" olduğu gösterilebilir. Örtenlik için: $0 < x \in R$ verilsin. $x = \sup\{r_k^{'} : k \in \mathbb{N}\}$ olacak biçimde $R_{\mathbb{Q}}$'da artan $(r_k^{'})$ dizisi bulunabilir. $r_k^{'} = \frac{m_k{'}}{n_k{'}}$ olmak üzere, $p_k = \frac{m_k}{n_k}$ diyelim. (p_k), $\mathbb{Q}$'da artan ve üstten sınırlı ve dolayısıyla Cauchy dizisidir. $r = [(p_k)] \in \mathbb{R}$ ve $f(r) = x$ olur. $x \leqslant 0$ için de $f(r) = x$ olacak biçimde $r \in \mathbb{R}$ olacağı açık. Dolayısıyla f örten. Kanıt tamamlanır.

Bu yazıda verilen Reel Sayılar Sistemi'nin inşası, **Cauchy dizileriyle yapılan inşa** olarak bilinir. Birçok inşa yöntemi olmasına karşın yaygın olarak bilinen bir başka inşa yöntemi, **Dedekind kesit yöntemi**dir. Detaylara [2]'den ulaşılabilir.

$\mathbb{R}$'nin sonsuzluğu

$\sqrt{2}$ krizinin çözümlerinin yarattığı değerlerden biri de farklı sonsuzlukların inşası olmuştur. $\mathbb{N}$ kümesiyle birebir eşlenebilir kümelere sayılabilir sonsuz küme denir. $\mathbb{N}$ ile eşlenemeyen sonsuz kümeye sayılamaz sonsuz denir. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ kümeleri sayılabilir sonsuz olmasına karşın:

Teorem 0.11. *$\mathbb{R}$ sayılamaz sonsuzdur.*

Proof. $\mathbb{R}$'nin sayılabilir sonsuz olduğunu varsayalım. $\mathbb{R} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ yazabiliriz. Aşağıdaki koşulları sağlayan (a_n) ve (b_n) diziler oluşturalım:

i. (a_n) kesin artan, (b_n) kesin azalan.
ii. Her n için $a_n < b_n$
iii. Her n için $x_n \notin [a_{n+1}, b_{n+1}]$.

$k = 0$ için $a_k = 0$ ve $b_k = 1$ seçelim. Yukarıdaki koşullar $a_0, ..., a_n$ ve $b_0, ..., b_n$ için doğru olsun. $a_n \in (a_n, b_n)$ ise

$$a_{n+1} = a_n + \tfrac{b_n - a_n}{4} \text{ ve } b_{n+1} = b_n - \tfrac{b_n - a_n}{4}$$

ve $a_n \notin (a_n, b_n)$ ise

$$a_{n+1} = x_n + \tfrac{x_n - a_n}{4} \text{ ve } b_{n+1} = x_n - \tfrac{x_n - a_n}{4}$$

olarak tanımlansın. Bu çekilde tümevarımla elde edilen (a_n) ve (b_n) dizileri (i) ve (ii) koşullarının yanında

$$|a_{n+1} - b_{n+1} \leqslant \frac{|a_n - b_n|}{2} \text{ ve } x_n \notin [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

eşitsizlikler sağlanır. $(a_n - b_n) \to 0$ olduğundan $(a_n$ ve (b_n) dizileri bir N için x_N'ye yakınsar. $a_{N+1} < x_N < b_{N+1}$ olduğu açiktır ama bu $x_N \notin [a_{N+1}, b_{N+1}]$ olmasıyla çelişir.

Gelin-Kaynana krizine "milli ve yerli" çözüm önerisi

Yazılı tabletler, $\sqrt{2}$ krizinden yaklaşık 1500 yüzyıl öncesinde bir başka krizin varlığından söz ediyor; Asur medeniyeti zamanında bir gelinin kocasına yazdığı bir mektupta, "Annenden çok çekiniyorum. Bana hep kötülük yapıyor. Artık bunu taşıyacak gücüm kalmadı. Bir an önce evine dön ve beni annenden kurtar," diyor [3]. $\sqrt{2}$ krizinin çözümü için insanlık büyük bir çaba harcarken, her yönüyle bu krizden çok daha somut olarak var olan gelin-kaynana kavgasına yönelik bir çözüm konusunda, ne devlet kurumlarının ne de sivil toplum kuruluşlarının bir girişimde bulunmaması kabul edilebilir bir durum değildir. Son zamanlarda ülkemizde yoğun ilgi gören "Yerli ve Milli" kavramının karakök iki krizinin çözümüne bir katkısı olmasa da, bu kavram içerisinde gelin-kaynana krizinin çözülebileceğini düşünüyorum. Bunun için uygulanacak ilk girişim, tarafların yüzlerine karşı "üç kulfu bir elham" okuma olabilir ve bu girişimin adı da "Gelin-Kaynana Kavgasını Yerli ve Milli Çözüm Girişimi" (GKKYMCG) olabilir.

References

[1] A. Törün, $\sqrt{2}$ *Krizi*, Bilim ve Gelecek 167 (2018), no.1, 70-71.
[2] I. Weisss, *The rela numbers-a survey of construction*, Rocky Mountain J. Math. 45 (2015), no.3, 737-762.
[3] http://blog.milliyet.com.tr/4000-yillik-gelenek–gelin-kaynana-kavgasi/Blog/?BlogNo=168913