Fonksiyonel Analiz

Zafer Ercan

???
ve
???'e

İçindekiler

Önsöz

1. Hahn-Banach Teoremi

Bir sonraki paragrafta kullanacağım **denince** ve **ilk akla gelen** kelimeleri, 1970'li yılların ortalarından itibaren radyolarda söylenen bir reklamı anımsattı, yazmadan edemedim:

Bir bilmecem var çocuklar

Haydi sor sor

Çayda kahvaltıda yenir

Acaba nedir nedir?

Bisküvi **denince** akla

Tamam şimdi buldum

Her an onun adı gelir

Eti eti eti.

Tıpkı yukarıdaki reklamda olduğu gibi topoloji **denince ilk akla gelen** sürekliliktir. Hatta, belirli anlamlarda topoloji denilen kavram, süreklilikten başka bir şey değildir. Bu bakış açısıyla, gerçel değerli sürekli fonksiyonları "az olan" topolojik uzayların pek kıymeti harbiyesi olduğu söylenemez. Özellikle, sabit fonksiyonlardan başka sürekli fonksiyonları olmayan topolojik uzaylar, kavramsal olarak çok çalışılması tercih edilen konular değildir. Bu nedenle, özellikle fonksiyonel analiz alanında, sürekli fonksiyon zenginliği açısından, temel örneklerden biri olan sürekli fonksiyon uzayı $C(X)$ çalışılırken, topolojik uzay X'in tümüyle düzenli sayılması konusunda bir eğilim gösterilir.

Vektör uzay denilince de ilk akla gelen lineerlik ve lineer fonksiyonlar, yani fonksiyonellerdir. Topolojik vektör uzaylar içinse, sekizinci akla gelebilecek ("ilk akla gelen"i çok tekrar etmek istemedim!) şeylerden birinin, sürekli fonksiyoneller olması çok doğaldır. Fonksiyonel analizin temel altsınıfını oluşturan topolojik uzayların T_0 özelliğini sağladığını varsaymak çok şey kaybettirmez, sonuçta uyduruktan bir özelliktir! (desem de sizler yine de temkinli olun.)

Bunun yanında, her topolojik vekör uzay tümüyle düzenli olması nedeniyle, topolojik vektör uzaylarda sürekli fonksiyonların zenginliği, kapalı kümelerinin çokluğu üzerinden ölçülebilir. Elbette T_0 olan topolojik vektör uzay Hausdorff olacağından, bu durumda sürekli fonksiyonlar daha da çok olacaktır. Ancak, bu durum sürekli fonksiyonlerin zenginliğini garanti edemez. Hatta, sıfır fonksiyonelden başka sürekli bir fonksiyonelin olabileceğini bile söylemez.

Bazı topolojik vektör uzaylarda sıfırdan farklı sürekli fonksiyonel olmayabileceği gibi, bazılarında da "yetersiz çoklukta" sürekli fonksiyoneller olabiliyor. Yani, E bir topolojik vektör uzay olmak üzere bazı $0 \neq x \in E$ için

$$f(x) = 1$$

olacak biçimde sürekli fonksiyonel bulunmayabilir, anlamında. Bu durum, "E'nin topolojik duali E', E'nin noktalarını ayırmıyor" olarak ifade edilir. Diğer taraftan, topolojik vektör uzayların önemli bir sınıfı olan konveks uzaylar için böyle bir "fakirlik" sözkonusu değildir. Yani, E konveks uzay olmak üzere her $0 \neq x$ için

$$f(x) = 1$$

olacak biçimde sürekli fonksiyonel $f : E \to \mathbb{R}$ vardır. Ancak, bu zenginliğin bedeli, ZF'de Hahn-Banach teoremidir. ZFC'de kanıtlanabilen bu teorem, ZF'de seçim aksiyomuna denk değildir. Buna karşın

Yukarıda bahsedilen fakirliği yok etmesi nedeniyle, Hahn-Banach teoremi yoksa; fonksiyonel analiz yoktur, diyor uzmanlar. Narici'de [13]'de *Hahn-Banach Teoremini severim, Casablanca ve Fontana di Trevi'yi sevdiğim gibi severim* diyor.

Şu ana kadar Hahn-Banach teoreminin ne olduğu ifede edilmedi. Buna karşın Luxemburg ve Wath ([10]) 2021'de ZF'de Hahn-Banach Teoreminin olabilmesi için gerek ve yeter koşulun, sıfırdan farklı her Banach uzayın norm dualinin sıfırdan farklı olması, olduğunu kanıtladılar. Bu, Hahn-Banach Teoremine çok daha anlaşılır ve sade bir hava vermiştir. Hahn-Banach Teoreminin karakteri, kendisine denk olan Mazur Orlicz Teoremi, Sandwich Teoremi, geometrik Hahn-Banach Teoremi gibi denk teoremler üzerinden de farklı biçimlerde de anlaşılabilir. Bu teoremlere bu bölümde yer verilecek. Bunun yanında, Hahn-Banach Teoreminin vektör değerli versiyonlarıda oldukca zengin olup, bunlara detaylı kanıtlarına girilmeden yer verilecektir.

Hahn-Banach teoreminin küme teoride de ayrı bir yeri vardır. Bunlar kitabın konusu dışı olsa da, çarpıcı olması açısından kısmi bir bilgi verelim: 1951'de Los ve Ryll-Nardzewski seçim aksiyomundan daha zayıf olan Ultrafiltre teoreminin (bunu Halpern 1964 yılında göstermiştir) Hahn-Banach teoremini kanıtlayabileceğini gösterdiler. Buna karşın, bu iki teoremin birbirlerine denk olabileceği konusunda Luxemburg tahminde bulunmuş olmasına karşın, denk olmadığı Pincus tarafından 1972 ve 1974 yıllarında gösterilmiştir. Bunun yanında, Hahn-Banach teoreminden $\mathbb{R}$'nin ölçülemeyen bir kümenin varlığı (Foreman ve Wehrung, 1991) ve Banach-Tarski paradoksu (Pawlikowski, 1991) kanıtlanabilir. Ayrıca, Fonksiyonel analizin çok temel teoremlerinden biri olan Krein-Milman (???'de verilecek) ve Hahn-Banach teoremlerinin birlektiliği seçim aksiyomuna denkir.

Çağdaş anlamda Hahn-Banach Teoremi, Hahn (1927) ve Banach'ya (1929) ait olan sonuçların bileşimi olarak ifade edilir. Buna karşın, bu teoremin asıl olarak Helly'nin 1912 yılında yapmış olduğu çalışmada yer aldığı apaçık olması nedeniyle, dönemin iki dev matematikçi olan Hahn ve Banach'ın bu konuda Helly'ye referans vermeme konusunda çok cimri davranmış olmaları ya da hiç referans vermemiş olmaları, "günahları boyunlarına" dedirtecek durumdadır.

Pietsch [15]'de, aslında Hahn-Banach teoreminin **Helly-Hahn-Banach teoremi** olması gerektiğini, ancak bunun için geç kalındığı belirterek, Helly'nin ayakta selamlanması gerektiğini ifade ediyor.

Hahn-Banach teorem(ler)inin birçok farklı versiyonları vardır. Bu bölümde verilen versiyonlar mümkün olduğu kadarıyla vektör uzaylar sınırları içerisinde verilecektir. Klasik Hahn-Banach teoreminin klasik ilk iki versiyonu verildikten sonra vetör değerli denk versiyonları 13.10'da verilececktir. Hahn-Banach teoreminin temel versiyonlarından bir diğeri topolojik vektör uzay için verilir ve **Hanh-banach teoremin geometrik versiyonu** olarak bilinir. Bu versiyon, bölüm ???'de çalışılacaktır. Ayrıca, bu bölümde Hahn-Banach teoremi ile ilgili verilen örnekler birçok açıdan sınırlı kalacak olmasına karşın, topolojik vektör uzay ve norm uzay içerisinde bu durum giderilecektir.

Bu altbölümde verilenler, bazen titizlikle verilirken (örneğin, Hahn-Banach teoreminin ifadesi), zaman zaman bilgi amaçlı niteliğinde olup, detaylara girilmeden verilecektir. Okurun, bunları ayırt edebilecek donanımda olduğu varsayılmıştır. Örneğin 13.3'de verilen

$$r_i = \int_0^1 f_i(t)dg(t)$$

integrali için, herhangi bir açıklama yapılmasa bile, g'nin $[0, 1]$ aralığından $\mathbb{R}$'ye tanımlı sınırlı değişim (denk anlamda: artak iki fonksiyonun farkı olarak yazılabilen fonksiyon) olduğunu ve bu integralin ne anlama geldiğini okurun en azından tahmin edebileceği varsayılmıştır. Diğer taraftan, gerektiğinde bunun anlamı daha açık bir şekilde verilebilectir.

1.1 Moment Problemi

Temel olarak Hahn-Banach Teoreminin öncülü "Moment problemi"dir. Moment problemi klasik ve çağdaş anlamda (norm uzay terimiyle) olmak üzere iki farklı formda ifade edilebilir. Klasik anlamda verilen moment problemi integral terimiyle verilen bir denklem sorusu olmasına karşın, diğeri çok daha genel olup, integral terimine bağlı olmak zorunda değildir; fonksiyonel ve norm terimli olan denklemlerdir.

Klasik anlamda moment probleminin genel olarak söylediği şudur: $\mathbb{R}$'de verilen bir (r_n) dizisine karşılık, her $n \in \mathbb{N}$

$$r_n = \int_0^1 t^n f(t)dt$$

eşitliğini sağlayan $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyon var mıdır? Tek midir[1]?

Moment probleminin birbirlerine oldukca benzeyen birçok versiyonu olup, bunlardan bazıları, $\mathbb{R}$'de verilen bir (r_n) dizisi için şöyle ifade edilebilir:

i. **Fourier serisi**: Her n için g_n, $[-\pi, \pi]$ aralığında $g_n(x) = \sin x$ ya da $g_n(x) = \cos(x)$ kuralıyla tanımlı fonksiyon olmak üzere (g_n) dizisi verilsin. Her n için

$$r_n = \int_{-\pi}^{\pi} t^n f(t) g_n(t)dt$$

eşitliğini sağlayan f fonksiyonu var mıdır?

ii. **Stieltjes moment problemi**: Her n için

$$r_n = \int_0^{\infty} t^n d\mu$$

eşitliğini sağlayacak biçimde uygun bir ölçüm μ var mıdır? Varsa ne zaman tektir? Bunun için bazı gerek ve yeter koşullar 1894 yılında Stieltjes tarafından verilmiştir.

iii. **Cebirsel moment problemi**: Her n için

$$r_n = \int_a^b t^n df$$

[1]Eblette, $t \to t^n f(t)$ fonksiyonunun "integrallenebilir" olduğu varsayılıyor. Ayrıca, "moment problem(ler)i" standart olarak tanımlanmış bir kavramlar değildir, örneğin, [4]'de moment problemi $\int_0^{\infty} t^n dg(t)$ terimiyle ve bir sonraki satırda ifade edilecek olan Hamburger moment problemi $\int_{-\infty}^{\infty} t^n dg(t)$ terimiyle ve Hausdorff moment problemi $\int_a^b t^n dg(t)$ terimiyle ifade edilmiştir.

eştliğini sağlayacak biçimde iki artan fonksiyonun farkı olarak yazılabilen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu var mıdır? Bu problem birbirlerinden bağımsız olarak Boas ve Polya tarafından 1939 yılında çözülmüştüt.

iii. **Hamburger moment problemi**: Stieltjes moment probleminde ifade edilen μ ölçümü Borel ölçüm olur?

iv. **Hausdorff moment problemi**: Her n için

$$x_n = \int_0^1 t^n d\mu$$

eştliğini ve belirli ilave koşulları sağlayan uygun bir Borel ölçüm μ var mıdır?

Burada verilen problemler farklı isimlerle verilmiş olmasına karşın, ortak özelliklerinin niteliğini okur farketmiştir.

Çağdaş anlamda, yani normlu uzay terimiyle, moment problemi şu şekilde ifade edilebilir: E bir norm uzay olsun, I bir indeks küme ve $\{r_i : i \in I\} \subset \mathbb{R}$ verilsin.

i. $\{f_i : i \in I\} \subset E'$ verilsin. Her $i \in I$ için

$$f_i(x) = r_i$$

olacak biçimde $x \in E$ var mıdır?

ii. $\{x_i : i \in I\} \subset E$ verilsin. Her $i \in I$ için

$$f(x_i) = r_i$$

olacak biçimde $f \in E'$ var mıdır?

Moment problemine günümüzden baktığımızda, yukarıda olduğu gibi ifade edilmesi, klasik anlamda verilen moment problemini kapsadığı görülebilir. Ayrıca, 1900'li yıllar civarında normlu uzay kavramı henüz tanımlanmamış olsa da, normlu uzay örnekleri alemde yerlerini almaya başlamış ve bunlar üzerinden moment problemi de yeni alanlara yelken açmaya başlayarak, sonuçta yukarıdaki gibi ifade edilmeyi haketmişlerdir.

Yukarıda verilen (ii) sorusunu çözen $f \in E'$ varsa, f'nin davranışı şöyle olacaktır: Her (α_n) dizisi ve her n ve için,

$$|\sum_{i=1}^{n} \alpha_n r_n| = |f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_n x_n| \leq ||f||| \textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_n x_n|$$

eşitsizliği sağlanacaktır ve buradan da

$$|\sum_{i=1}^{n} \alpha_n r_n| \leq M||\sum_{i=1}^{n} \alpha_n x_n||$$

olacak biçimde $M \geq 0$ sayısının var olduğu anlaşılacaktır. Burada M, verilen (α_n) dizisinden bağımsızdır. Demek ki, sorunun yanıtının evet olması için bu elde edilen son eşitsizlik gereklidir. Bu eşitsizliğin yeterli olduğu bazı özel Banach uzayları için verilmiştir. Bunlar,

i. l_2 uzayı için 1908 yılında [21]'de Schmidt[2],

ii. $L_p([a,b])$ uzayı için 1909 yılında [19]'de Riesz,

iii. $C([a,b])$ uzayı için 1911 yılında [17]'de Riesz,

iv. l_p $(1 < p < \infty)$ uzayı için 1913 yılında [18]'de Riesz ,

v. Dizi uzayları için 1921 yılında [8]'de Helly ,

vi. normu uzaylar için 1927 yılında [6]'de Hahn

tarafından verilmiştir.

Alıştırmalar

1.1. E bir vektör uzay, (r_n), $\mathbb{R}$'de ve (x_n), E'de bir dizi olsun. F, E'nin $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi tarafından üretilen altuzayı olsun. $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in F$ olmak üzere,

$$f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i$$

kuralıyla bir fonksiyon tanımlanabilir mi?

1.2. E bir normlu uzay, (r_n), $\mathbb{R}$'de ve (x_n), E'de bir dizi olsun. F, E'nin $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi tarafından üretilen altuzayı olsun. $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in F$ için,

$$f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i$$

kuralıyla bir fonksiyonel tanımlanabilmesi için, α_i'ler gerçel sayılar olmak üzere,

$$|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i| \leq M||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i||$$

eşitsizliğini sağlayan sabit bir $M \geq 0$ sayısının olması yeterli midir?

---

[2] Hilbert'in öğrencisi olan Schmidt, "$||.||$" sembolünü kullanan matematikçidir.

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$$

eştsizliğini sağlayan $x = (a_n)$ dizisini "normiert" olarak adlandırmış ve

$$||x|| = [\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2]^{\frac{1}{2}}$$

yazmıştır.

1.2 “Baba” Helly Lemma

Harry Hochstadt [9]’de Eduard Helly’i Hahn-Banach Teoriminin babası olarak tanımlıyor. Helly’i “baba” olmaya hak kazandıran neden, Helly’nin aşağıdaki teoremin kanıtında kullandığı eşitsizliktir.

Teorem 1.1 (Helly Lemma, [7]). *$n \in \mathbb{N}$ sabit olmak üzere $f_1, ..., f_n, f_{n+1} \in C([a,b])$ ve $r_1, ..., r_n \in \mathbb{R}$ verilsin. Her $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}$ için*

$$|\sum_{i=}^{n} t_i r_i| \leq M||\sum_{i=1}^{n} t_i f_i||$$

eşitsizliğini sağlayan $M > 0$ sayısı varsa, her $t_1, ..., t_n, t_{n+1} \in \mathbb{R}$ için

$$|\sum_{i=1}^{n+1} t_i r_i| \leq M||\sum_{i=1}^{n+1} t_i f_i||$$

eşitsizliğini sağlayan $r_{n+1} \in \mathbb{R}$ bulunabilir.

Kanıt: Gerekirse eşitsizliği M’ye bölerek, $M = 1$ alınarak kanıt verilebilir, dolayısıyla $M = 1$ alalım. $t_1, s_1, ..., t_n, s_n \in \mathbb{R}$ verilsin.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=}^{n}(s_i - t_i)r_i &\leq ||\sum_{i=1}^{n}(s_i - t_i)f_i|| \\
&= ||f_{n+1} - f_{n+1} + \sum_{i=1}^{n}(s_i - t_i)f_i|| \\
&= ||f_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} s_i f_i - (f_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} t_i f_i)|| \\
&\leq ||f_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} s_i f_i|| + || - (f_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} t_i f_i)||
\end{aligned}$$

eşitsizliğinden,

$$-\sum_{i=}^{n} t_i r_i - ||f_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} t_i f_i|| \leq ||f_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} s_i f_i|| - \sum_{i=}^{n} s_i r_i$$

eşitsizliği elde edilir[3]. Bu eşitsizlikte s_i ve t_i’lerin keyfi olması dikkate alınarak her $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ için,

$$-\sum_{i=}^{n} t_i r_i - ||f_{n+1} + \textstyle\sum_{i=1}^{n} t_i f_i|| \leq A \leq ||f_{n+1} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} s_i f_i|| - \textstyle\sum_{i=}^{n} s_i r_i$$

eşitsizliğini sağlayan $A \in \mathbb{R}$ seçilebilir.

$$r_{n+1} = A$$

[3]Bu eşitsizliğe **Helly eşitsizliği** diyeceğiz. Helly’nin burada elde ettiği sonuç Hahn-Banach Teoreminin özel halidir.

alınmasıyla istenilen özellikte r_{n+1} edilebilir. □

Helly'nin bu lemmayı vermesindeki amaç, bir önceki altbölümde de bahsedilen ve Riesz Teoremi olarak bilinen aşağıdaki teoremin basit kanıtını vermek ve genellemekti.

Teorem 1.2 (Riesz [17]). *(f_i), $C([a,b])$'de, (r_i), $\mathbb{R}$'de bir dizi ve $M \geq 0$ verilsin. Aşağıdakiler denktir.*

i. *$||T|| \leq M$ olacak biçimde $T : C([a,b]) \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyonel vardır.*

ii. *Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{R}$ için*

$$|\sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i| \leq M||\sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i||$$

eşitsizliği sağlanır.

Banach, Helly'nin çalışması [7]'yi kullanarak Riesz teoremini aşağıdaki gibi genellemiştir.

Teorem 1.3 (Banach [2]). *E normlu uzay, I bir indeks küme olmak üzere, $\{r_i : i \in I\} \subset \mathbb{R}$ ve $\{x_i : i \in I\} \subset E$ altkümeleri verilsin. Aşağıdakiler denktir.*

i. *Her $i \in I$ için $f(x_i) = r_i$ olacak biçimde sürekli $f : E \to \mathbb{R}$ vardır.*

ii. *Her sonlu $J \subset I$ kümesi için, α_j'ler reel sayılar olmak üzere,*

$$|\sum_{j \in J} \alpha_j r(j)| \leq M||\sum_{j \in J} \alpha_j s(j)||$$

eşitsizliğini sağlayan $M \geq 0$ sayısı vardır[4].

Bu teorem Hahn-Banach teoreminin basit bir uygulaması olarak kanıtlanabilir. Üstelik, Hahn-Banach teoreminin birinci versiyonuna denk olup, bu denklik Banach'nı kitabının da bulunabilir. (1987 İngilizce çevirisinin 34.sayfasında Teorem 4.)

Her ne kadar Hochstadt, Helly eşitsizliğinin Hahn-Banach teoreminin kanıtında kullanılan en temel eşitsizlik olması nedeniyle, Helly'yi Hahn-Banach teoreminin babası olarak tarif etse de, bunun bir teknik kullanım olması nedeniyle "baba" yerine "teknik baba" denmesinin daha uygun olacağını düşünmekteyim.

Alıştırmalar

1.3. E bir vektör uzay, F, E'nin vektör altuzayı, $p : E \to \mathbb{R}$ ve $f : F \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonel olsun. Her $x \in F$ için $f(x) \leq p(x)$ eşitsizliği sağlanıyorsa her $x \in F$ ve $a \in E$ için

$$f(x) - p(x - a) \leq t(a) \leq f(x) + p(a - x)$$

eşitsizliğini sağlayan $t : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun olduğunu gösterin.

[4] Bu teorem bazı kaynaklarda Helly-Banach teoremi olarak da bilinir.

1.3 Riesz ve Helly'nin Diğer Çalışmaları

Sürekli olarak bahsetmemeize rağmen daha ne olduğunu tanımlamadığımız Hahn-Banach teoreminin inşasının hangi aşamasına baksanız, Riesz'in izlerini görürsünüz[5].

Altbölüm 1.1'de de F. Riesz'in [19], [17] ve [18] çalışmalarında

$$L_p([0,1]),\ C([0,1]) \text{ ve } l_p$$

uzayları için moment problemini çözdüğü belirtilmiş ve Teorem 13.3 ile genelleştirildiği ifade edilmişti. Günümüzün diliyle, bu uzaylar için Hahn-Banach teoremini bu uzaylar için kanıtlamıştı. Bu yönüyle Hahn-Banach teoremi, Riesz'in bu sonuçlarının kurumsallaşmış halidir.

Riesz, önceki altbölümlerde belirtilen çalışmalarının hemen sonrasın ve Hahn-Banach teoremi öncesi, moment problemini $L_p([0,1])$ ve $C([0,1])$ uzayları üzerinden farklı iki yapıya dönüştürürerek, aşağıdaki soruları soruyor ve yanıtlıyordu:

i. I, bir index küme, $p,q>1$ sayıları $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ biçinde olsun.

$$\{f_i : i\in I\}\subset L_q([0,1]) \text{ ve } \{r_i : i\in I\}\subset \mathbb{R}$$

kümeleri verilsin. Her $i\in I$ için,

$$r_i=\int_0^1 f_i g$$

olacak biçimde (Lebesgue integral olarak) $g\in L_p([0,1])$ var mıdır? Riesz, bu sorunun yanıtının evet olması için, gerek ve yeter koşulun α_i'ler gerçel sayılar olmak üzere, sonlu her $J\subset I$ için,

$$|\sum_{i\in J}\alpha_i r_i|\leq M[\int_0^1|\sum_{i\in J}\alpha_i f_i|^q]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğini sağlayan $M\geq 0$ olması olduğunu gösteriyordu. Bu durumda, sorunun çözümü olan $g\in L_p([0,1])$ fonksiyonun sağladığı temel özellik, α_i'ler gerçel sayılar olmak üzere, sonlu her $J\subset I$ için,

$$g_0(\sum_{i\in J}\alpha_i f_i)=\sum_{i\in J}\alpha_i r_i$$

kuralıyla tanımlı gürekli $g_0 : L_q([0,1])\to\mathbb{R}$ fonksiyonelinin **sürekli genişlemesi** olmasıdır. İşte burada geçen "genişleme" kelimesi Hahn-Banach teoreminin özüdür.

[5] Bu arada, Riesz "reis" olarak değil, "riiz" olarak okunur.

ii. $BV[0,1]$, $[0,1]$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlı iki artan fonksiyonun farkı olarak yazılabilen fonksiyonların kümesi olsun. I bir indeks küme olmak üzere,

$$\{f_i : i \in I\} \subset C([0,1]) \text{ ve } \{r_i : i \in I\} \subset \mathbb{R}$$

kümeleri verilsin. Her $i \in I$ için

$$r_i = \int\limits_0^1 f_i(t)dg(t)$$

olacak biçimde $g \in BV[0,1]$ var mıdır? Riesz, bu sorunun yanıtının evet olması için, gerek ve yeter koşulun α_i'ler gerçel sayılar olmak üzere, sonlu her $J \subset I$ için,

$$|\sum_{i\in J} \alpha_i r_i| \leq K \sup_{x\in[0,1]} |\sum_{i\in J} r_i f_i(x)|$$

olacak biçimde sabit $K \geq 0$ olması olduğunu kanıtlıyordu. Bu problemin ve çözümü de Hahn-Banach teoremini inşa eden patikalardan biri oluyordu.

Hahn-Banach teoremini var yapan patikalardan bir diğeri, Helly'nin [8]'de yaptığı çalışmalar olduğu söylenebilir. Helly, bu çalışmasında l_p uzayları için elde edilen sonuçları norm dizi uzayılarına taşıyarak genelledi. Bunu yaparken norm dizi uzay, dual uzay ve dual uzaylarda norm kavramını tanımlayarak, şu problemi çözmeye çalıştı:

$E \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ norm dizi uzay, $E' \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, E'nin dual uzayı olmak üzere, (f_n), (her n için $f_n = (f_{nj})$, $\mathbb{C}$'de bir dizi!) E' uzayında ve (c_n), $\mathbb{C}$'de bir dizi olmak üzere

$$c_n = \sum_{j\in\mathbb{N}} x_i f_{nj}$$

eştliğini sağlayan bir $x = (x_i) \in E$ var mıdır?

helly, bu soruyu çözmek için her n için

$$F(f_n) = c_n$$

olacak biçimde $F \in (E')'$ bulmaya çalışarak, ikinci dual kavramını da devreye sokmuş oluyordu.

1.4 Hahn-Banach Teoremi

Şu ana kadar Hahn-Banach teoriminin ne olduğu tanımlanmamış olsa da, bu teoreme giden ya da oradan geçen patikalardan bahsedildi. Bu patikalara Schmidt, Riesz, Helly gibi isimler verilmiş, ya da verilme eğilimleri gösterilmişti. Anlaşılan, o dönemde Hahn ve Banach olanlarlardan ya da olacaklardan çk haberdar değillerdi!

Hahn-Banach teoreminin iki temel versiyonu vardır. Bunları vermeden öce, daha önce tanımlanmış ve üzerinde işlemler yapılmış olsa da, birkaç kavrama vurgu yapmak için tekrar hatırlayalım: E bir vekör uzay olmak üzere, E'den $\mathbb{R}$'ye tanımlı ve her $x, y \in E$ ve $r \geq 0$ için

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \text{ ve } p(rx) = rp(x)$$

koşullarını sağlayan p fonksiyonuna alttoplamsal fonksiyon denir. Her $r \in \mathbb{R}$ için

$$p(rx) = |r|p(x)$$

eşitliğini sağlayan p alttoplamsal fonksiyona yarınorm denir.

$$p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

koşulunu sağlayan p yarınorma norm denir. F, E'nin bir vektör altuzayı, $g : F \to \mathbb{R}$ ve $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonelleri her $x \in F$ için

$$f(x) = g(x)$$

eçitliği sağlanıyorsa, f'ye g'nin linner genişlemesi denir. E normlu uzay ve $f : E \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonsa, yani $f \in E'$ ise, f'nin normu

$$||f|| = \sup_{||x|| \leq 1} |f(x)|$$

olarak tanımlanır.

Şimdi Hahn-Banach teorem(ler)ini ifade edebiliriz.

Teorem 1.4 (Hahn [6]). *Bir norm uzayın bir altuzayında tanımlı her sürekli fonksiyonelin, üst uzaya normu koruyacak biçimde, sürekli fonksiyonel genişlemesi vardır*[6].

Yani: E bir normlu uzay, F, E'nin altuzayı ve $g : F \to \mathbb{R}$ bir sürekli fonksiyonel olsun.

$$||f|| = ||g||$$

[6]Bu teorem Hahn-Banach teoreminin birinci versiyonu, norm genişleme versiyonu, Hanh versiyonu olarak da bilinir.

olacak biçimde g'nin genişlemesi olan sürekli $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli vardır.

Hahn-Banach teoreminin ikinci versiyonyu şu şekilde ifade edilebilir.

Teorem 1.5 (Banach [1]). *Bir vektör altuzayda tanımlı ve üstuzayda tanımlı bir altlineer tarafından üstten sınırlandırılan her fonksiyonel, üstuzaya aynı altlineer tarafından üstten sınırlandırılacak biçimde lineer olarak genişleyebilir*[7]

E bir vektör uzay, F, E'nin altuzayı ve $p : E \to \mathbb{R}$ altlineer olsun. $f : F \to \mathbb{R}$ fonksiyonel ve $f \leq p$ ise, $g \leq p$ olacak biçimde f'nin fonksiyonel genişlemesi vardır.

Kanıt: E vektör uzay, F, E'nin altuzayı, $p : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonel ve $f : F \to \mathbb{R}$ fonksiyone olsun ve her $x \in F$ için $f(x) \leq p(x)$ eşitsizliği sağlansın. $E = F$ ise istenilen açık. Diğer durum için $x_0 \in E \setminus F$ seçelim. Her $x, y \in F$ için

$$f(x)+f(y) = f(x+y) \leq p(x+y) = p(x-x_0+x_0+y) \leq p(x-x_0)+p(x_0+y)$$

olmasından, her $x \in F$ için

$$f(x) - p(x - x_0) \leq p(x_0 + y) - f(y)$$

eşitsiliği elde edilir. (Bu aşamada Helly tekniği-eştsizliği kullanıldı.) $\mathbb{R}$'nin tamlığı kullanılarak her $x, y \in F$ için

$$f(x) - p(x - x_0) \leq \alpha \leq p(x_0 + y) - f(y)$$

olacak biçimde $\alpha \in \mathbb{R}$ seçilebilir. G, $F \cup \{x_0\}$ tarafından üretilen E'nin altuzayı olmak üzere, Her $x \in F$ and $r \in \mathbb{R}$ için

$$g(x + rx_0) = f(x) + r\alpha$$

eşitliğini sağlayan, $g : G \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlanabilir. g, f'nin G'ye bir fonksiyonel genişlemesi olup, her $x \in G$ için, $g(x) \leq p(x)$ eştsizliği sağlanmış olur. O halde, $G = E$ ise kanıt tamamlanmış olur.

Gelen durum için: $\mathcal{F}$, elemanları G, F'yi kapsayan E'nin altuzayı ve g, G'den E'ye tanımlı, her $x \in G$ için $g(x) \leq p(x)$ eşitliğini sağlayan f'nin bir fonksiyonel genişlemesi olmak üzere, (G, g) ikililerinden oluğan küme olsun. (E, g)ı$\mathcal{F}$ olduğunu göstermek kanıtı tamamlayacaktır.

$(F, f) \in \mathcal{F}$ olduğundan, $\mathcal{F}$, boşkümeden farklı olup, $\mathcal{F}$'de $(G_1, g_1) \leq (G_2, g_2)$ sıralaması, $G_1 \subset G_2$ ve g_2, g_1'in genişlemesi olarak tanımlansın. $(\mathcal{F}, \leq)$ bir kısmı sıralı bir kümedir. $\mathcal{F}$'de her zincirin bir üst sınırın olduğu kolaylıkla gösterilir. Dolayısıyla, Zorn Lemma kullanılarak, $\mathcal{F}$'nin bir maksimal elemanı (F_∞, f_∞) olduğu gösterilebilir. $F_\infty \setminus E$ kümesinin boşkümeden farklı olma durumunda, kanıtın birinci basamağı kullanılarak $\mathcal{F}$'de (F_∞, f_∞) elamanından

[7] Bu teorem, Hahn-Banach teoreminin- ikinci versiyonu, vektö uzay versiyonu, Banach versiyonu, analitik versiyonu olarak bilinir. Buna karşın, Hahn-Banach teoremi denildiğinde kastedilen bu versiyon olacaktır.

farklı ve daha büyük bir eleman elde edilirdi. Bu da, (F_∞, f_∞)'nin maksimal olmasıyla çelişir. O halde $F_\infty = E$ ve dolayısıyla f_∞ aranan özellikleri sağlayan f'nin bir genişlemesi olur. Kanıt tamamlanır $\square$

Alıştırmalar

1.4. Her $f \in l_\infty$ için,

$$\liminf_{n\to\infty} f(n) \le F(f) \le \limsup_{n\to\infty} f(n)$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonel $F : l_\infty \to \mathbb{R}$ olduğunu gösterin.

1.5. Normu koruyan fonksiyonel genişleme sonsuz tane olabilir: $E = C([0,1])$ vektör uzayını normu

$$||f|| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

kuralıyla donatılmış norm uzay olarak ele alalım. F, E'nin elemanları sabit olan E'nin altuzayı olsun. $H : M \to \mathbb{R}$, $H(f) = f(0)$ olarak tanımlanan fonksiyonelin normunun 1 ve her $t \in [0,1]$ için $H_t(f) = f(t)$ kuralıyla tanımlanan $H_t : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonelinin H'nin normu bir olan genişlemesi olduğunu gösterin.

1.6. E bir norm uzay ve F, E'nin altuzayı olsun. $f : F \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonel ve $g, h : E \to \mathbb{R}$, f'nin sürekli fonksiyonel genişlemesi olsun ve

$$||f|| = ||g|| = ||h||$$

eşitliği sağlansın. Her $t \in [0,1]$ için,

$$f_t(x) = tg(x) + (1-t)h(x)$$

kuralıyla tanımlı f_t fonksiyonunun f'nin sürekli fonksiyonel genişlemesi ve

$$||f|| = ||f_t||$$

olduğunu gösterin.

1.7. E bir vektör uzay, F, E'nin bir altuzayı, $p, q : E \to \mathbb{R}$ altlineer, $f_0 : F \to \mathbb{R}$ fonksiyonel ve her $x \in F$ içın $f_0(x) \le p(x)$ ve $f_0(x) \le q(x)$ eşitsizlikleri sağlansın. Aşağıdakilerin denk olduğunu gösterin.

i. f_0'ın $f \le p$ ve $f \le q$ olacak biçimde fonksiyonel genişlemesi f vardır.

i. f_0'ın her $x \in E$ için

$$-q(-x) \le f(x) \le p(x)$$

olacak biçimde fonksiyonel genişlemesi f vardır.

1.8. E bir vektör uzay, her $1 \le i \le n$ için $p_i : E \to \mathbb{R}$ yarınorm ve $f : E \to \mathbb{R}$,

$$f \le \sum_{i=1}^{n} p_i$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonel olsun. Her i için $f_i \le p_i$ olan ve $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$ eşitlıgini sağlayan $f_i : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonellerin olduğunu gösterin.

1.9. (Nachbin [12]) E bir normlu uzay, F, E'nin altuzayı olmak üzere $a \in E \setminus F$ verilsin. $f_0 : E \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonel olsun. Her $z \in F$ için $\mathbb{R}$'de $f_0(z)$ merkezli ve $||z-a||$ yarıçaplı kapalı aralık B_z ile gösterilsin, yani

$$B_z = [||z-a|| - f_0(z), ||z-a|| + f_0(z)]$$

olsun. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i. B_z'lerin arakesiti boşkümeden farklıdır.

ii. $r \in \bigcap_{z \in F} B_z$ verilsin. $x \in F$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f(x + \alpha a) = f_0(x) + \alpha r$$

kuralıyla tanımlı fonksiyonel sürekli ve f_0 fonksiyonelinin genişlemesidir. Ayrıca, $||f|| = ||f_0||$ olur.

1.5 Sandwich Theorem

Sandwich teoremleri olarak bilinen bir grup teoremler topluluğu genel olarak Hahn-Babach teoreminden kanıtlanabilir. Bu teoremlerden biri, bu altbölümde verilerek, Hahn-Banach teoreminin bu teorem tarafınından kanıtlanabildiği not edilecek. Böylece, Hahn-Banach teoreminin farklı bir bakış açısıyla da anlaşılması sağlanacaktır.

Teorem 1.6. *E bir vektör uzay, $q : E \to \mathbb{R}$ süperlineer ve $p : E \to \mathbb{R}$ altlineer olsun ve ayrıca, $q \leq p$ eşitsizliği sağlansın. İlaveten, F, E'nin bir altuzayı olmak üzere, $h : E \to \mathbb{R}$, her $x \in F$ için*

$$q(x) \leq f(x) \leq p(x)$$

eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyonel olsun. Aşağıdakiler denktir.

i. *h'nin $q \leq H \leq p$ eşitsizliğini sağlayan fonksiyonel genişlemesi $H : E \to \mathbb{R}$ vardır.*

ii. *Her $x \in F$ and $y \in E$ için*

$$h(x) \leq p(x + y) - q(y)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt: $i \Rightarrow ii$: $x, y \in E$ verilsin.

$$q(x + y) \leq H(x + y) \leq p(x + y)$$

ve

$$q(y) \leq H(y) \leq p(y)$$

eştsizlikleri kullanılarak

$$q(x + y) - p(y) \leq H(x + y) - H(y) \leq p(x + y) - q(y)$$

eşitsizliği elde edilir. H'nin fonksiyonel olması da kullanılarak,

$$q(x + y) - p(y) \leq H(x) \leq p(x + y) - q(y)$$

olur. H'nin f'nin genişlemesi olması nedeniyle de, her $x \in F$ ve $y \in E$ için, istenilen

$$h(x) \leq p(x+y) - q(y)$$

eşitsizliği elde edilir.
$ii \Rightarrow i$: $x, y \in E$ verilsin.

$$q(y) \leq p(y) = p(x+y-x) \leq p(x+y) + p(-x)$$

olması nedeniyle,

$$-p(-x) \leq p(x+y) - q(y)$$

olur. Bunun kullanılmasıyla da,

$$T(x) = \inf_{y \in E} [p(x+y) - q(y)]$$

kuralıyla, $T : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlanabilir. Biraz uğraşla da T'nin altlineer olduğu da gösterilebilir. Ayrıca her $x \in F$ için $h(x) \leq T(x)$ eşitsizliği sağlanır. Hahn-Banach teoremi gereği, h'nin $H \leq T$ eşitsizliğini sağlayan bir $H : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonel genişlemesi elde edilir. $x \in E$ verilsin. $H(x) \leq T(x) \leq p(x)$ olur. Ayrıca,

$$H(x) \leq p(x + (-x)) - q(-x) = -q(-x)$$

olmasından,

$$q(-x) \leq -H(x) = H(-x)$$

eşitsizliği elde edilir. x'in keyfi olmasından da

$$q(x) \leq H(x)$$

olur. Sonuç olarak, $q \leq H \leq p$ eşitsizliği eklde edilir. Kanıt tamamlanır. $\square$

Bu teoremin bir uygulamsıyla aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 1.7 (Sandwich Theoremi)**.** *E vektör uzay, $q : E \to \mathbb{R}$ süperlineer ve $p : E \to \mathbb{R}$ altlinner olsun ve $q \leq p$ eşitsizliği sağlansın. $q \leq f \leq p$ eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyonel $f : E \to \mathbb{R}$ vardır.*

Bu teorem Alıştırma 13.9'da olduğu gibi genellenebilir. Teorem 13.6 Hahn-Banach teoremi kullanılarak kanıtlandı. Tersi de doğrudur:

Teorem 1.8. *ZF'de Hahn-Banach teoremi ve Teorem 13.6 birbirlerine denktir.*

Kanıt: . Teorem 13.6'yı varsayalım. E bir vektör uzay, F, E'nin altuzayı, $p : E \to \mathbb{R}$ altlineer ve $h : F \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli her $x \in F$ için $f(x) \leq p(x)$ eşitsizliğini sağlasın.

$$q(x) = -p(-x)$$

kuralıyla tanımlı $q : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süerlineer olup, $q \leq p$ olmasının yanında, her $x \in F$ için

$$q(x) \leq f(x) \leq p(x)$$

eşitsizliğini sağlar. $T : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu Teorem 13.6'nın kanıtında olduğu gibi tanımlansın, yani

$$T(x) = \inf_{y \in E} [p(x+y) - q(y)]$$

kuralıyla tanımlansın. Her $x \in F$ için $f(x) \leq T(x)$ olduğu kolaylıkla gösterilir. Teorem 13.6 gereği, h'nin $q \leq H \leq p$ özelliğinde fonksiyonel genişlemesi $H : E \to \mathbb{R}$ vardır. Bu kanıtı tamamlar.

Alıştırmalar

1.10. (Sandwich Teoremi) E bir vektör uzay, $p : E \to \mathbb{R}$ altlineer, $A \subset E$ konveks koni, $q : A \to \mathbb{R}$ süperlineer olsun ve her $x \in A$ için $q(x) \leq p(x)$ eşitsizliği sağlansın. Her $a \in A$ ve $x \in E$ için

$$q(a) \leq f(a) \text{ ve } f(x) \leq p(x)$$

eşitsizliğini sağlayan $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonelin olduğunu gösterin.

1.11. E bir vektör uzay, $X \subset E$, $p : E \to \mathbb{R}$ altlineer ve $f : X \to \mathbb{R}$, $f \leq p|_X$ eşitsizliğini sağlayan fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$\inf_{s \in X} [p(s - ax - by) - f(s) + af(x) + bf(y)] \leq 0$$

olacak biçimde $a, b > 0$ sayıları varsa,

$$F \leq p \text{ ve } f \leq F|_X$$

eşitsizliğini sağlayan $F : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonelin olduğunu gösterin. (Bu, Fuchsteiner ve König (1978) ve König (1982) tarafından verilmiştir.)

1.12. (Sandwich teoremi aşağıdaki gibi genellebilir.) E bir vektör uzay, $X \subset E$, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve her $x \in X$ için $f(x) \leq p(x)$ eşitsizliği sağlansın. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i. $g(x) = \inf_{s \in X, r \geq 0} [p(x + rs) - rf(s)]$ kuralıyla $g : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlanabilir.

ii. $g(x) = \inf_{s \in X, r > 0} [p(x + rs) - rf(s)]$ olur.

iii. $h : E \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonel olsun. $f \leq g$ olması için gerek ve yeter koşul $f \leq h|_X$ ve $h \leq p$ olmasıdır. Ayrıca X konveks ve f konkav ise g altlineer olur.

iv. X konveks ve f konkav ise $F \leq P$ ve $f \leq F|_X$ olacak biçimde $F : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonel vardır.

(Bu problem [14]'den alınmıştır, problem 3.103)

1.6 Hahn-Banach Teoremi'nin Bir Başka Kanıtı

Bir önceki bölümde verilen Hahn-Banach teoreminin kanıtı iki aşamada verilmişti. Birinci aşamada kullanılan yöntem Helly'ye aitti. Bu teoremin farklı bir kanıtı, Helly eşitsizliği kullanılmadan da verilebilir, bu altbölümde bu yapılacak. Kanıtta kullanılacak temel argümanlardan biri, her minimal altlinner fonksiyonun, yani kendisinden farklı ve küçük altlineer fonksiyonu olmayan altlineer fonksiyonun fonksiyonel olduğu kullanılacak[8].

Aşağıda verilen iki teoremin kanıtı okura bırakıldı.

Teorem 1.9. *E bir vektör uzay ve $p : E \to \mathbb{R}$ altlineer olsun. Aşağıdakiler denktir.*

i. *p bir fonksonel.*

ii. *Her $x \in E$ için $p(x) + p(-x) \leq 0$.*

iii. *Her $x \in E$ için $p(x) + p(-x) = 0$.*

Teorem 1.10. *E vektör uzay ve $p : E \to \mathbb{R}$ sublinear olsun. Verilen $w \in E$ için*

$$q_w(x) = \sup\{p(x + tw) - tp(w) : t \geq 0\}$$

kuralıyla tanımlı $q_w : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $q_w \leq p$ eşitsizliğini sağlayan altlineer fonksiyondur.

Altlineer fonksiyon ile fonksiyonel arasınki temel bir ilişki verilebilir. Bu ilişkiyi vermeden önce aşağıdaki teoremi kanıtsız olarak verelim.

Teorem 1.11. *E bir vektör uzay ve $p : E \to \mathbb{R}$ altlinner olsun. Her $y \in E$ için,*

$$p_y(x) = \inf\{p(x + ry) - rp(y) : r \geq 0\}$$

kuralıyla, $p_y : E \to \mathbb{R}$ altlineer fonksiyonu tanımlanabilir ve $p_y \leq p$ eşitsizliği sağlanır.

E vektör uzay ve $p : E \to \mathbb{R}$ altlineer fonksiyonu, $q \leq p$ eşitsizliğini sağlayan her altlineer fonksiyonu q için, $p = q$ olma koşulu sağlanıyorsa, p'ye **minimal altlineer** fonksiyon denir.

Teorem 1.12. *Bir altlineer fonksiyonun fonksiyonel olması için gerek ve yeter koşul, minimal altlineer olmasıdır.*

[8][3]'de bu kanıt için bilinen en basit denilmekte.

Kanıt: E bir vektör uzay olsun. $p : E \to \mathbb{R}$ minimal altlineer fonksiyonu verilsin. Teorem 13.8'de ifade edilidiği gibi E'de Her $w \in E$ için, p_ω sublinear

$$p_w(x) = \inf\{p(x + tw) - tp(w) : t \geq 0\}$$

kuralıyla, eşitsizliğini sağlayan p_w altlinner fonksiyonu tanımlanabilir. p, minimal olduğundan $p = p_w$ olur. Ayrıca,

$$p(-w) = p_w(-w) \leq p(-w + w) - p(w) = -p(w)$$

elde edilir. Buradan da $p(-w) + p(w) \leq 0$ olur. Theorem 1.6 gereği de k p'nin linear olduğu söylenebilir. Tersine, $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonel, $p : E \to \mathbb{R}$ altlineer ve $p \leq f$ eşitsizliği sağlansın. Her $x \in E$ için,

$$0 = p(0) \leq p(x) + p(-x)$$

eşitsizliği kullanılarak,

$$p(x) \leq f(x) = -f(-x) \leq -p(-x) \leq p(x)$$

eşitsizliği ve buradan da $p(x) = f(x)$ elde edilir. x keyfi olduğundan da $f = p$ olur. Yani, f, minimal altlinner fonksiyondur. □

Bu teoremin kullanılmasıyla aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 1.13. *Her altlineer fonksiyonun altında kalan bir fonksiyonel vardır.*

Kanıt: E bir vektör uzay ve $p : E \to \mathbb{R}$ altlineer fonksiyone verilsin. p'den küçük ya da eşit altlineer fonksiyonların kümesini L ile gösterelim. Yani,

$$L = \{q : Q : E \to \mathbb{R} \text{ altlineer ve } q \leq p\}$$

olsun. $p \in L$ olduğundan L boşkümeden farklıdır. L'yi noktasal sıralamaya göre kısmı sıralı küme olarak ele alalım. $C \subset L$, bir zincir olsun. Her $x \in E$ için,

$$\{q(x) : q \in C\}$$

kümesinin alttan sınırlı olduğunu gösterelim. Bunun olmadığını varsayalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n \leq -n$ olacak biçimde $t_n \in C$ vardır. q_n altlineer fonksiyonu

$$q_n(x) = \min\{t_i(x) : 1 \leq i \leq n\}$$

kuralıyla tanımlansın. (q_n) azalan ve her n için $q_n(x) \leq -n$ olur.

$$0 = q_n(0) = q_n(x + (-x)) \leq q_n(x) + q_n(-x) \leq -n + q_n(-x)$$

eşitsizliğinden,

$$n \leq q_n(-x) \leq q_1(-x)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu, $q_1(x) \in \mathbb{R}$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla

$$f(x) = \inf\{t(x) : t \in C\}$$

kuralıyla f fonksiyonu tanımlanabilir. f fonksiyonunun altlineer olduğu kolaylıkla gösterilebilir ve ayrıca C'nin altsınırıdır. Dolayısıyla, L'nin bir minimal elemanı vardır ve üstelik f, ayrıca E'de minimal altlineer fonksiyondur. Teorem 13.9 gereği, f lineer ve $f \leq p$ olur. □

Şimdi Hahn-Banach teoreminin farklı bir kanıtı verilebilir: E, F, p ve f Hahn-Banach teoreminin ifadesinde olduğu gibi tanımlansın. Her $y \in F$ için

$$f(-y) \leq p(-y)$$

olduğundan, her $x \in E$ için

$$-p(-x) + f(-y) \leq -p(-x) + p(-y)$$

ve dolayısıyla,

$$-p(-x) \leq -p(-x) + p(-y) - f(-y)$$

olur. Bu ve

$$p(-y) - p(-x) \leq p(x - y)$$

olması kullanılarak,

$$-p(-x) \leq p(x - y) + f(y)$$

eştsizliğ elde edilir. Bunların kullanılmasıyla,

$$q(x) = \inf\{p(x - y) + f(y) : y \in F\}$$

kuralıyla $q : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlanabilir.

$$q \leq p$$

ve her $x \in F$ için

$$q(x) \leq f(x)$$

eşitsizlikleri sağlanır. q'nın altlineer olduğu da kolaylıkla gösterilir. Theorem 13.10 gereği, $\overline{f} \leq q$ olacak biçimde, $\overline{f} \in E^*$ vardır. Ayrıca, F'de $\overline{f} \leq p \leq f$ olması nedeniyle, F'de $f = \overline{f}$ eşitliği elde edilir. Kanıt tamamlanır. □

1.7 Mazur-Orlicz Teoremi

Hahn-Banach teoremine denk olan teoremlerden biri, Mazur-Orlicz teoremi olarak bilinir. Bu altbölümde bu teorem kanıtıyla verilecek. Hahn-Banach Teoremi kullanılarak kanıtlanacak ve sonrasında, aslında denk olduğu gösterilecek.

Teorem 1.14 (Mazur-Orlicz Teoremi [11])**.** *E bir vektör uzay, $p : E \to \mathbb{R}$ sublinear, $\varphi : T \to E$ ve $\alpha : T \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. Aşağıdakiler denktir.*

1. *Ağğıdaki koşulları sağlayan $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli vardır.*
   i. $f \leq p$.
   ii. $\alpha \leq f \circ \varphi$.
2. *Her $k \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}^+$, $b_i \in T$ $(1 \leq i \leq k)$ için,*

$$\sum_{n=1}^{k} a_i\alpha(b_i) \leq p(\sum_{n=1}^{k} a_i\varphi(b_i)).$$

Kanıt: ([16]) (1)'den (2)'nin elde edilebileceği açık. (2)'nin gerçekleştiğini varsayalım. Verilen $x \in E$ için elemanları, $k \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}^+$ ve $b_i \in T$ olmak üzere,

$$p(x + \textstyle\sum_{n=1}^{k} a_n\alpha(b_n)) - \sum_{n=1}^{k} a_n\alpha(b_i)$$

olan küme ($S(x)$ ile gösterelim) alttan $-p(-x)$ ile sınırlıdır. Yani,

$$-p(-x) \leq p(x + \textstyle\sum_{n=1}^{k} a_n\alpha(b_n)) - \sum_{n=1}^{k} a_n\alpha(b_i)$$

olur. Dolayısıyla,

$$q(x) = \inf S(x)$$

kuralıyla $q : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlanabilir. q'nın altlineer olduğu da kolaylıkla gösterilebilir. Ayrıca,

$$q \leq p$$

olup, her $t \in T$ için

$$q(-\varphi(t)) \leq p(-\varphi(t) + \varphi(t)) - \alpha(t) = -\alpha(t)$$

eşitsizliği elde edilir. Teorem 13.10 gereği $f \leq q$ olacak biçimde $f \in E^*$ fonksiyoneli bulunabilir. Her $t \in T$ için

$$f(-\varphi(t)) \leq q(\alpha(t)) \leq -\alpha(t)$$

ve buradan da, her $t \in T$ için

$$\alpha(t) \leq f(\varphi(t))$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece $\alpha \leq f \circ \varphi$ olur. Yani (1) sağlanır. □

Noktasal olarak üstten sınırlı lineer fonksiyoneller ailesinin noktasal supremumum fonksiyonunun altlineer olduğu kolaylıkla gösterilir. Bunun tersi, Mazur-Orlicz teoremi kullanılarak, altlineer ve fonksiyoneller arasındaki ilişki maksimum terimiyle daha iyi anlaşılabilir.

Teorem 1.15. *Bir vektör uzayda tanımlı reel değerli bir fonksiyonun altlineer olması için gerek ve yeter koşul, bir fonksiyoneller ailesinin noktasal maksimimu olmasıdır.*

Kanıt: E bir vektör uzay ve $p : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. p'nin altlineer olduğunu varsayalım. $e \in E$ verilsin. $T = \{t\}$ olmak üzere, $\varphi : T \to$ ve $\alpha : T \to \mathbb{R}$ fonksiyonları sırasıyla,

$$\varphi(t) = e \text{ ve } \alpha(t) = p(e)$$

olarak tanımlansın. Mazur-Orlicz teoreminin denk koşullarından ikincisi bu fonksiyonlar için sağlanacağından

$$f_e \leq p,\, p(e) = \alpha(t) \leq f_e(\varphi(t)) = f_e(e)$$

olacak biçimde $f_e : E \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli vardır. Dolayısıyla $f_e(e) = p(e)$ elde edilir. $A = \{f_e : e \in E\}$ denilirse, her $x \in E$ için

$$p(x) = \max\{f(x) : f \in A\}$$

elde edilir. Teoremin diğer yönü açık. □

Dikkat edilirse Mazur-Orlicz teoreminin kanıtı Hahn-Banach teoremi kullanılarak verildi. Aslında Hahn-Banach Teoremi Mazur-Orlicz teoreminden kanıtlanabilir. Yani:

Teorem 1.16. *Mazur-Orlicz ve Hahn-Banach Teoremleri birbirlerine denktir.*

Kanıt: Hahn-Banach Teoremi kullanılarak Mazur-Orlicz Teoremi kanıtlandı. (Teorem13.11.) Şimdi Mazur-Orlicz teoremininin ZF gerçekleştiğini varsayalım. E bir vektör uzayı, E_0, E'nin vektör altuzayı $p : E \to \mathbb{R}$ altlineer ve $f_0 : E_0 \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli her $x \in E_0$ için $f_0(x) \leq p(x)$ eşitsizliğini sağlasın. $\varphi : E_0 \to E$, $\alpha : E_0 \to \mathbb{R}$ fonksiyonları sırasıyla

$$\varphi(t) = t \text{ ve } \alpha(t) = f_0(t)$$

kurallarıyla tanımlansın. Bu fonksiyonlar Mazur-Orlicz teoreminin ikinci koşulunu sağlar. Dolayısıla $f \leq p$ ve $\alpha \leq f \circ \varphi$ koşullarını sağlayan f fonksiyoneli vardır. f'nin f_0'nın bir genişlemesi ve $f \leq p$ eşitsizliğinin sağlandığı kolaylıkla gösterilir. □

Mazur-Orlicz teoremi kullanılar Sandwich teoremini (Teorem 13.7) kanıtı öyle verilebilir: Teorem 13.14'de $T = E$, her $x \in T$ için $\varphi(x) = x$ ve $\alpha(t) = q(t)$ alını, Teorem 13.14 kullanılarak kanıt tamamlanır.

1.8 Hahn-Banach Genişleme Özelliği

Bir topolojik uzayın altuzayında tanımlı sürekli her fonksiyonun bütün uzaya sürekli genişlemesi olmayabilir. Bu durumun topolojik vektör uzaylarda karşılı şu soruyla sorgulanmaya çalışılabilir: Bir topolojik vektör uzayın altuzayında tanımlı sürekli fonksiyonelin bütün uzaya sürekli fonksiyonel genişlemesi var mıdır?

Tanım 1.1. Alt uzayında tanımlı sürekli her fonksiyonelinin üst uzaya sürekli fonksiyonel genişlemesi olan topolojik vektör uzayın **Hahn-Banach genişleme özelliği** var denir.

Teorem 1.17. *Her konveks uzayın Hahn-Banach genişleme özelliği vardır.*

Kanıt: E yerel konveks uzay, F, E'nin bir altuzayı ve $f : F \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonel olsun. f, F'de sıfırın bir komşuluğunda sınırlır. (Neden, hangi teorem gereği?) E konveks uzay olduğundan her $x \in U \cap F$ için $|f(x)| \leq 1$ olacak biçimde E'de sıfırın mutlak konveks komşuluğu U vardır. p_U, U'nun Minkowski fonksiyoneli olsun. Yani, $p_U : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$p_U(x) = \inf\{r : r \geq 0, x \in rU\}$$

kuralıyla tanımlansın. p_U sürekli yarınorm olur. Ayrıca her $x \in F$ için

$$|f(x)| \leq p_U(x)$$

eşitsizliğinin sağlandığı kolaylıkla gösterilir. Hahn-Banach teoremi gereği, f'nin sürekli fonksiyonel genişlemesi vardır ve $F \leq p_U$ eşitsizliği sağlanır. □

Bu teoremin kanıtında kullanılan yaklaşımla aşağıdaki teorem kolaylıkla kanıtlanabilir.

Teorem 1.18. *Sıfırdan farklı bir topolojik vektör uzayın dual uzayının sıfırdan farklı olması için gerek ve yeter koşul, sıfırın uzaydan farklı konveks komşuluğunu olmasıdır.*

Bu teoreme karşın dual uzayı sıfırdan farklı bir topolojik vektör uzayın yerel konveks uzay olması gerekmez.

Örnekler

1.1. $E = l_p$ $(0 < p < 1)$ uzayın yerel konveks olmayan Hahn-Banach genişleme özelliği olan topolojik vektör uzaydır.
1.2. $E = L_p([0,1])$ uzayı dual uzayı sıfır olan uzaydır.

Topolojik vektör uzayların önemli problem sınıflarından biri, "complemented altuzay" olup, şu biçimde ifade edilebilir: E bir vektör uzay ve F, E'nin kapalı altuzayı olsun. $E = F \oplus G$ olacak biçimde kapalı G alatuzayı var mıdır? Konveks uzaylar için kısmı bir yanıt aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 1.19. *E Hausdorff konveks uzay ve G, E'nin kapalı altuzayı olsun. E'nin $E = F \oplus G$ olacak biçimde kapalı altuzayı G vardır.*

Kanıt: E Hausdorff konveks uzay ve F, E'nin sonlu boyutlu alt uzayı olsun. $B = \{x_1, ..., x_n\}$, F'nin boyutu olsun. Her i için $f_k : F \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f_k(\textstyle\sum_{i=1}^n r_i x_i) = r_k$$

olarak tanımlansın. Her f_k sürekli ve lineer ve dolayısıya E'ye sürekli genişlemesi $\overline{f_k} : E \to \mathbb{R}$ vardır. $P : E \to E$ fonksiyonu

$$P(x) = \textstyle\sum_{i=1}^n \overline{f_i}(x) x_i$$

kuralıyla tanımlansın. P fonksiyonu sürekli ve lineerdir.

$$G = \{x - P(x) : x \in E\},$$

E'nin kapalı alt uzayı olup, $E = F \oplus G$ olur.

1.9 Hahn-Banach Teoreminin Bir Genellemesi

Hahn-Banach teoreminin birçok genellemesi olabilir. Bunlardan biri bu bölümde verilecek. Her ne kadar bu teorem kitapta kullanılmayacak olunsa da, Hahn-Banach teoreminin daha yakından tanınmasını sağlayacaktır[9].

Teorem 1.20 (Agnew-Morse [5])**.** *E, F, f ve p Hahn-Banach Teoreminde olduğu gibi tanımlansın. $\mathcal{A} \subset L(E)$ ve her $A, B \in \mathcal{A}$ için $AB = BA$ olsun. Her $A \in \mathcal{A}$ ve $y \in F$ için*

$$A(F) \subset F \text{ ve } f(A(y)) = f(y)$$

[9]Lax, Fonksiyonel Analiz adlı kitabında bu teorem için "...is both useful and beautiful" demekte.

oluyorsa f'nin $\overline{f} \leq p$ eşitsizliğini ve her $x \in E$ için

$$\overline{f}(A(x)) = \overline{f}(x)$$

eşitliğini sağlayan lineer genişlemesi $\overline{f}$ vardır.

Kanıt: Önce $\mathcal{A}$'nın bir birim operatörü içeren yarıgrup olduğunu varsayalım. $\mathcal{C}$, $L(E)$ vektör uzayında $\mathcal{A}$'nın konveks tamlanışı olsun. Yani,

$$\mathcal{C} = \{\sum_{i=1}^{n} r_i A_i : n \in \mathcal{N}, r_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} r_i = 1\}.$$

Her $x \in E$ için

$$\{p(C(x)) : C \in \mathcal{A}\}$$

kümesi alttan sınırlıdır: Gerçekten de, $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$, $r_1, ..., r_n \leq 0$ ve $r_1 + ... + r_n = 1$ olmak üzere her $x \in E$ için,

$$p(\sum_{i=1}^{n} r_i A_i(-x)) \leq \sum_{i=1}^{n} r_i p(A_i(-x))) = \sum_{i=1}^{n} r_i p(-x) = p(-x)$$

olur. Buradan

$$-p(-x) \leq -p(\sum_{i=1}^{n} r_i A_i(-x)) = -p(-\sum_{i=1}^{n} r_i A_i(x)) \leq p(\sum_{i=1}^{n} r_i A_i(x))$$

elde edilir.

Böylece

$$g(x) = \inf\{p(C(x)) : C \in \mathcal{C}\}$$

kuralıyla $g : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlanabilir. $I \in \mathcal{C}$ olduğundan $g \leq p$ eşitsizliği sağlanır. g'nin altlineer olduğu kolaylıkla gösterilebilir. p pozitif homojen olduğundan, g'de pozitif homojen olur. g'nin alttoplamsal olduğunu göstermek için: $x, y \in E$ verilsin. $\epsilon > 0$ için g'nin tanımı gereği,

$$g(x) \leq p(C(x)) \leq g(x) + \epsilon \text{ ve } g(y) \leq p(D(y)) \leq g(y) + \epsilon$$

olacak biçimde $C, D \in \mathcal{A}$ bulunabilir. Buradan,

$$g(x+y) \leq p(CD(x+y)) = p(CD(x) + p(CD(y)) \leq p(CD(x)) + p(CD(y)) \leq g(x) + g(y) + 2\epsilon$$

eşitsizliği elde edilir. $\epsilon > 0$ keyfi olduğundan da

$$g(x+y) \leq g(x) + g(y)$$

olur. Böylece g'nin sublinear olduğu gösterilmiş olur. Her $x \in F$ ve $C \in \mathcal{C}$ için $C(x) \in F$ ve

$$f(C(x)) = f(\sum_{i=1}^{n} r_i A_i(x)) = \sum_{i=1}^{n} r_i f(A_i(x)) = \sum_{i=1}^{n} r_i f(x) = f(x)$$

olur. Buradan

$$f(y) = f(C(y)) \leq p(C(y))$$

elde edilir. $\mathcal{C}$ üzerinden infimum alınarak,

$$f(y) \leq g(y)$$

eşitsizliği elde edilir. Buna Hahn-Banach teoremi uygulanarak f'nin

$$\overline{f} \leq g$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonel genişlemesi $\overline{f}$ elde edilir. Her $x \in E$ ve $A \in \mathcal{A}$ verilsin. $\overline{f}(x) = \overline{f}(A(x))$ olduğunu gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$C_n = \tfrac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} A^i \in \mathcal{C}$$

olur. Ayrıca

$$C_n(I - A) = \tfrac{1}{n}(I - A^n)$$

olduğunu not edelim. $x \in E$ verilsin. g'nin tanımınıda kullanarak

$$\begin{array}{rcl} g(x - A(x)) & \leq & p(C_n(x - A(x))) \\ & = & p(C_n(I - A)(x)) \\ & = & p(\frac{1}{n}(x - A^n(x)) \\ & \leq & \frac{1}{n}[p(x) + p(-A^n(x))] \\ & = & \frac{1}{n}[p(x) + p(-x)] \end{array}$$

elde edilir. Buradan, $n \to \infty$ alırak,

$$\lim_{n\to\infty} g(x - A(x)) \leq 0$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla

$$\overline{f}((x - A(x))) \leq 0$$

eşitsizliği, yani

$$\overline{f}(x) \leq \overline{f}(A(x))$$

olur. x keyfi olduğundan, bu eşitsizlikte x yerine $-x$ alarak,

$$\overline{f}(A(x)) \leq \overline{f}(x)$$

elde edilr. Buradan da,

$$\overline{f}(A(x)) = \overline{f}(x) \leq 0$$

elde edilir. Kanıt tamamlanır. □

Yukarıdaki teorem her ne kadar Hahn-Banach teoreminin genellemesi olsa da, Hahn-Banach teoremine denktir.

1.10 Vektör Uzay Değerli Hahn-Banach Teoremi

Temel olarak iki versiyon biçiminde verilen Hahn-Banach teoreminin ikinci versiyonu reel değerli ve sıralama üzerinden verilmişti. Bu teorem sıralı vektör uzaylara genellenebilir. Bu bölümde bu tür genellemeler belirli denklikler üzerinden verilecektir. Bunun öncesi hatırlayalım: Boşkümeden farklı sonlu her altkümesinin supremumu olan sıralı vektör uzaya Riesz uzayı (vektör lattis) denir. E, bir Riesz uzayı olmak üzere,

$$[x, y] = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$$

biçimindeki E'nin altkümesine sıra aralık, ve bir sıra aralığın altkümesi olan her altkümeye sıra sınırlı küme denir. Üstten sınırlı her altkümesinin supremumu ve infimumu olan Riesz uzaya **Dedekind complete Riesz uzayı** denir.

Tanım 1.2. I, üstten yönlü bir küme, Z, Dedekind tam Riesz uzay ve $B(I, Z)$, I'dan Z'ye tanımlı sıra sınırlı netlerin vektör uzayı olsun. Her $f \in B(I, Z)$ için,

$$q(f) = \sup_{i \in I} \inf_{j \geq i} f(j) \text{ ve } p(f) = \inf_{i \in I} \sup_{j \geq i} f(j)$$

kuralıyla $q, p : B(I, Z) \to Z$ fonksiyonları tanımlansın. Her $f \in B(I, Z)$ için,

$$q(f) \leq LIM(f) \leq p(f)$$

eşitsizliğini sağlayan $LIM : B(I, Z) \to Z$ fonksiyoneline **Banach limit** denir.

Yukarıda verilen tanımda $I = \mathbb{N}$ alma durumunda $B(I, \mathbb{R})$ uzayının Banach limitine **Banach-Mazur limit** denir.

Aşağıda verilen teorem ve kanıt [20]'in 12.34. kısmından alınmıştır.

Teorem 1.21. [10] *E bir vektör uzay, F, E'nin vektör altuzayı ve Z Dedekind tam sıralı vektör uzay olsun. Aşağıdakiler denktir.*

i. *I, yönlü küme olmak üzere sıra sınırlı netlerin Riesz uzayı $B(I, F)$'nin Banach limiti vardır.*

ii. *$p : E \to Z$ konveks fonksiyon, $f : F \to Z$, her $x \in F$ için $f(x) \leq p(x)$ eşitsizliğini sağlayan fonksiyonel ise, f'nin $g \leq p$ eşitsizliğini sağlayan fonksiyonel genişlemesi $g : E \to Z$ vardır.*

iii. *$p : E \to Z$ altlineer, $f : F \to Z$, her $x \in F$ için $f(x) \leq p(x)$ eşitsizliğini sağlayan fonksiyonel ise, f'nin $g \leq p$ eşitsizliğini sağlayan $g : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonel genişlemesi vardır.*

[10] Bu teorem ve kanıt [20]'in 12.34. kısmından alınmıştır.

iv. *$p : E \to Z$ konveks fonksiyon ise her $x \in E$ için $p(x) = \max_{i \in I} p_i(x)$ olacak biçimde afine fonksiyonları ailesi (p_i) vardır.*

v. *$p : E \to Z$ altlineer fonksiyon ise her $x \in E$ için $p(x) = \max_{i \in I} p_i(x)$ olacak biçimde afine fonksiyonları ailesi (p_i) vardır.*

vi. *$C \subset E$ konveks küme olmak üzere, $p : E \to Z$ konkav ve $p : C \to Z$ konveks fonksiyonları her $x \in C$ için $q(x) \leq p(x)$ eşitsizliğini sağlasın. Her $x \in C$ için $q(x) \leq f(x) \leq p(x)$ eşitsizliğini sağlayan afine fonksiyon $f : C \to Z$ vardır.*

Kanıt: Kanıt verilirken şıklarda verilen biçimiyle semboller hakkında bir açıklama yapılmadan kullanılacaktır.
$ii \Rightarrow iii$: Her altlineer fonksiyonun bir konveks fonksiyon olması nedeniyle istenilen açık.
$ii \Rightarrow iv$: $x_0 \in E$ verilsin. $q : E \to Z$ fonksiyonu

$$q(x) = p(x + x_0) - p(x_0)$$

kuralıyla tanımlansın. q fonksiyonun konveks olduğu kolaylıkla gösterilebilir. $F = \{0\}$ alarak, varsayım gereği, $g \leq q$ olacak biçimde $g : E \to Z$ fonksiyoneli bulunabilir. Ayrıca,

$$f_{x_0}(x) = g(x - x_0) + p(x_0)$$

kuralıyla tanımlı $f_{x_0} : E \to Z$ fonksiyon afine olup, $f_{x_0} \leq p$ olup, $f_{x_0}(x_0) = p(x_0)$ olur. Bu istenileni kanıtlar.
$iii \Rightarrow i$: $E = B(I, Z)$ diyelim. $f \in F$ neti,

$$\sup_{i \in I} \inf_{i \geq j} f(j) = \inf_{i \in I} \sup_{j \geq i} f(j)$$

eştliğini sağlıyorsa, f'ye **yakınsak** diyelim, ve bu durumda

$$\lim(f) = \sup_{i \in I} \inf_{i \geq j} f(j) = \inf_{i \in I} \sup_{j \geq i} f(j)$$

yazalım. E'nin yakınsak netlerinin kümesi E'nin bir vektör altuzay olup, F ile gösterelim. F'den Z'ye $f \to \lim(f)$ kuralıyla tanımlı $\lim : F \to Z$ fonksiyonun bir fonksiyonel olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Ayrıca,

$$p(f) = \inf_{i \in I} \sup_{i \geq j} f(j)$$

kuralıyla $p : E \to Z$ fonksiyonu tanımlanabilir. p, bir altlineer olup, her $f \in F$ için,

$$\lim(f) \leq p(f)$$

eşitsizliği sağlanır. Varsayım gereği, lim fonksiyonelinin, her $f \in E$ için

$$LIM(f) \leq p(f)$$

eşitsizliği sağlayan fonksiyonel genişlemesi $LIM : E \to Z$ fonksiyoneli vardır. LIM bir Banach limittir.
$iv \Rightarrow v$: Her altlineer fonksiyonun bir konveks fonksiyon olması nedeniyle istenilen açık.
$v \Rightarrow i$: $p(f) = \inf_{i\in I} \sup_{i\geq j} f(j)$ kuralıyla tanımlı $p : B(I,Z) \to Z$ fonksiyonu altlineer olur. Varsayım gereği,

$$LIM(0) = p(0)$$

olan, $LIM \leq p$ eşitsizliğini sağlayan, affine $LIM : B(I,Z) \to Z$ fonksiyonu vardır. $LIM(0) = 0$ olması nedeniyle, LIM bir fonksiyonel olur. Ayrıca,

$$-LIM(f) = LIM(-f) \leq p(-f)$$

eşitsizliği kullanılarak,

$$\sup_{i\in I} \inf_{i\geq j} f(j) \leq LIM(f)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, LIM fonksiyonelinin bir Banach limit olduğu gösterilmiş olur.
$i \Rightarrow ii$: Her $S \subset E$ için aşağıdaki koşulları sağlayan $g : E \to Z$ fonksyoyonların kümesi F_S ile gösterilsin.

i. Her $x \in E$ için $-p(-x) \leq g(x) \leq p(x)$

ii. g'nin $span(F \cup S)$ altuzayına kısıtlanışı fonksiyonel.

iii. Her $x \in F$ için $g(x) = f(x)$

Her S için F_S kümesi boşkümeden farklıdır.

$$I = \{(g,S) : g \in F_S\},$$

$$(g_1,S_1) \leq (g_2,S_2) \Leftrightarrow S_1 \subset S_2$$

sıralamasına göre yönlü küme olarak alınsın. Varsayım gereği $B(I,Z)$'nin en az bir Banach limiti vardır. LIM, bir Banach limit olsun. Her $x \in E$ için,

$$H_x((g,S)) = g(x)$$

kuralıyla $H_x : I \to Z$ fonksiyonu tanımlanabilir. Her $i \in I$ için

$$-p(-x) \leq H_x(i) \leq p(x)$$

olduğundan, $H_x \in B(I,Z)$ olur.

$$f_\infty(x) = LIM(F_x)$$

kuralıyla $f_\infty : E \to Z$ fonksiyonu tanımlanabilir. Her $e \in Z$ için, $\overline{e}$ fonksiyonu $\overline{e}(i) = e$ kuralıyla tanımlı $\overline{e} \in B(I,Z)$ olmak üzere, her $i \in I$ ve $x \in E$ için

$$H_x \le \overline{p(x)}$$

olması nedeniyle,

$$f_\infty(x) = LIM(H_x) \le LIM(\overline{p(x)}) = p(x)$$

olur. Ayrıca, $x \in F$ ve $i \in I$ için,

$$F_x(i) = f_0(x) \text{ ve } f_\infty(x) = f_0(x) = LIM(\overline{f_0(x)})$$

olduğu açıktır. Yani, f_∞, f_0 fonksiyonelinin genişlemesidir.

f_∞ fonksiyonunun bir fonksiyonel olması kanıtı tamamlayacaktır. $x, y \in E$ verilsin ve $S = \{x, y\}$ diyelim. F_S boşkümeden farklı olduğundan, $i = (g, S) \in F_S$ seçebiliriz. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ verilsin.

$$g(\alpha x + \beta y) = \alpha g(x) + \beta g(y)$$

olamasından,

$$H_{\alpha x+\beta y}(i) = \alpha H_x(i) + \beta H_y(i)$$

elde edilir. LIM fonksiyonunun fonksiyonel olmasıda kullanılarak,

$$f_\infty(\alpha x + \beta y) = \alpha f_\infty(x) + \beta f_\infty(y)$$

eştliği elde edilir. Yani, f_∞ fonksiyoneldir. Teoremin ifade biçimine uygun olması açısından $f_\infty = g$ alınarak kanıt tamamlanır.
$i \Rightarrow vi$: Kanıt, üç aşamada verilecek.

E bir vektör uzay, $C \subset E$ konveks, $g : C \to Z$ konveks fonksiyon, $e : C \to Z$ konkav fonksiyon olmak üzere, $e \le g$ eşitsizliği sağlansın.

Kanıtı önce

$$\inf\{g(x) - e(x) : x \in C\} = 0$$

eşitliğinin sağlandığını varsayarak verelim. Sonrasında genele kolaylıkla geçilebilir. (Neden?)

$\mathcal{M}$, $e \le f \le g$ eşitsizliğini sağlayan konveks $f : C \to Z$ fonksiyonların kümesi olsun. $g \in \mathcal{M}$ olduğundan, $\mathcal{M}$ boşkümeden farklıdır.

a. Her $f \in \mathcal{M}$ ve $r + s = 1$ eşitliğini sağlayan $r, s \in (0,1)$ sayılarına karşılık $p \le f$ ve her $x, y \in C$ için,

$$rp(x) + sp(y) \leq p(rx + sy)$$

eşitsizliğini sağlayan $p \in \mathcal{M}$ vardır:

aşağıda verilen biçimde $f_0 = f$ olmak üzere, $\mathcal{M}$'de

$$f_0 \geq f_1 \geq ... \geq f_n \geq ...$$

olacak biçimde bir (f_n) dizisi oluşturulacak. $f_0 = f \in \mathcal{M}$ alalım. $n \in \mathcal{N}$ olmak üzere,

$$f_0 \geq f_1 \geq ... \geq f_n$$

olacak biçimde $f_i \in \mathcal{M}$ fonksiyonları verilsin. e konkav ve $e \leq f_n$ olması nedeniyle, her $x, y \in C$ için,

$$e(x) \leq \tfrac{1}{r}[f_n(rx + sy)]$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla,

$$f_{n+1}(x) = \inf_{y \in C} \tfrac{1}{r}(f_n(rx + sy) - se(y))$$

kuralıyla fonksiyon $f_{n+1} : C \to Z$ tanımlanabilir. $e \leq f_{n+1}$ eşitsizliği de sağlanır. Ayrıca, f_n fonksiyonunun konveks ve e fonksiyonu konkav olması nedeniyle f_{n+1} fonksiyonunun da konveks olduğu biraz çabayla gösterilebilir. $f_n \leq g$ ve f_n konveks olduğundan, her $x, y \in C$ için,

$$\tfrac{f_n(rx+sy)-se(y))}{r} \leq f_n(x) + \tfrac{s}{r}(f_n(y) - e(y)) \leq f_n(x) + \tfrac{s}{r}(g(y) - e(y))$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte y'yi sabit tutup x üzerinden infimum alınarak ve

$$\inf_{x \in C}(g(x) - e(x)) = 0$$

olması da kullanılarak,

$$f_{n+1} \leq f_n$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $f_{n+1} \in \mathcal{M}$ olur.

$$p(x) = \inf_n f_n(x)$$

kuralıyla $p : C \to Z$ fonksiyonu tanımlanabilir. $p \in \mathcal{M}$ olduğu açıktır.

$$p(x) = \inf_{y \in C} \tfrac{1}{r}(p(rx + sy) - se(y))$$

eşitliği sağlanır.

$$p \leq f$$

ve her $x, y \in C$ için

$$rp(x) + sp(y) \leq p(rx + sy)$$

eşitsizliği sağlanır ki, bu istenilendir.

b. $f \in \mathcal{M}$ ve $(r_1, x_1), ..., (r_J, x_J) \in (0,1) \times C$ verilsin. Her $y \in C$ ve $1 \leq j \leq J$ için

$$q(y) \leq f(y)$$

ve

$$q(r_j x_j + (1 - r_j)y) = r_j q(x_j) + (1 - r_j)q(y)$$

eşitliğini sağlayan $q \in \mathcal{M}$ vardır:

verilen sonlu diziyi Her $k \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq i \leq J$ için,

$$r_{kJ+i} = r_i \text{ ce } x_{kJ+i} = x_i$$

olarak tanımlayarak $(0,1) \times C$ kümesinde $((r_j, x_j))$ dizisini tanımlayalım. Aşağıda verilen ömtemle, $\mathcal{M}$'de

$$f_1 \geq p_1 \geq f_2 \geq p_2 \geq ...$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde $\mathcal{M}$'de (f_n) ve (p_n) dizileri şöyle tanımlansın: $f_1 = f$ alarak, $p \in \mathcal{M}$, (a)'da belirtilen biçimde tanımlansın. $n \geq 1$ olmak üzere $f_n \in \mathcal{M}$ verilsin, ve p_n, (a) da olduğu gibi tanımlansın. yani, $f_n \geq p_n$ ve $s_n = 1 - r_n$ olmak üzere her $x, y \in C$ için,

$$p_n(r_n x + s_n y) \geq r_n p_n(x) + s_n p_n(y)$$

eşitsizliği sağlansın.

$$f_{n+1}(y) = \tfrac{1}{s_n}[p_n(r_n x_n + s_n y) - r_n p_n(x_n)]$$

kuralıyla $f_{n+1} : C \to Z$ fonksiyonu tanımlanabilir. f_{n+1} fonksiyonu konveks olur, $e \leq f_{n+1}$ eşitsizliğini sağlar. diğer taraftan p_n konveks olduğundan $f_{n+1} \leq p_n$ olur. Böylece $f_{n+1} \in \mathcal{M}$ olur. Her $x \in C$ için,

$$\inf_n f_n(x) = \inf_n q_n(x)$$

olduğunu not edelim. $q : C \to Z$ fonksiyonu,

$$q(x) = \inf_n f_n(x)(= \inf_n q_n(x))$$

kuralıyla tanımlansın. $j \in \mathcal{N}$ sabit verilsin. Her $k \in \mathbb{N}$ için,

$$n_k = j + kJ$$

olarak tanımlansın. Bu durumda,

$$r_{n_k} = r_j,\ s_{n_k} = s_j \text{ ve } x_{n_k} = x_j$$

olduğunu not edelim.

$$\begin{aligned} p(y) &= \inf_k f_{n_k+1}(y) \\ &= \inf_k \frac{1}{s_{n_k}}[p_{n_k}(r_{n_k}x_{n_k} + s_{n_k}y) - r_{n_k}p_{n_k}(x_{n_k}] \\ &= \frac{1}{s_j}[q(r_jx_j + s_jy) - r_jq(x_j)] \end{aligned}$$

eştliği elde edilir. Böylece (b) gösterilmiş olur.

Şimde (b) kullanılarak teorem tamamlanabilir: $Q \subset (0,1) \times C$ kümesi verilsin. Her $(r,x) \in Q$ ve $y \in C$ için

$$q(rx + (1-r)y) = rq(x) + (1-r)q(y)$$

eşitsizliğini sağlayan $q \in \mathcal{M}$'nin olabileceği (b) de gösterildi. Bu özellikteki (Q,q) ikililerinin kümesini Δ ile gösterelim.Her $(Q,q) \in \Delta$ için

$$\pi_x((Q,q)) = q(x)$$

kuralıyla $\pi_x : \Delta \to Z$ fonksiyonu tanımlanabilir. $\pi_x(\Delta) \subset [e(x), f(x)]$ olur. Böylece $\pi_x \in B(\Delta, Z)$ olur. Δ,

$$(Q,q) \subset (T,t) \Leftrightarrow Q \subset T$$

sıralamasına göre yömlü kümedir. Varsayım gereği Banach limit $LIM : B(\Delta, Z) \to Z$ vardı]r. $f : C \to Z$ fonksiyonu,

$$f(x) = LIM(\pi_x)$$

kuralıyla tanımlansın. Her $x \in C$ için

$$e(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

eşitsizliği sağlanır. f'nin afine olduğunu göstererek kanıt tamamlanacak. $x, y \in C$ ve $r \in (0,1)$ verilsin. $(r,x) \in Q$ olacak biçimde $(Q,q) \in \Delta$ seçilebilir.

$$q(rx + (1-r)y) = rq(x) + (1-r)q(y)$$

olması nedeniyle,

$$\pi_{rx+(1-r)y}(Q,y) = r\pi_x(Q,y) + (1-r)\pi_y(Q,y)$$

olur. Buradan da

$$f(rx + (1-r)y) = rf(x) + (1-r)f(y)$$

elde edilir. Yani, f afine olur.

$vi \Rightarrow i$: $q, p : B(I, Z) \to Z$ fonksiyonu, sırasıyla,

$$q(f) = \sup_{i \in I} \inf_{j \geq i} f(i) \text{ ve } p(f) = \inf_{i \in I} \sup_{j \geq i} f(i)$$

kuralıyla tanımlansın. q konkav ve p konveks olduğundan, varsayım gereği her $f \in B(I, Z)$ için,

$$q(f) \leq H(f) \leq p(f)$$

eşitliğini sağlayan H fonksiyoneli vardır. Tanım gereği, H Banach limit olur.

1.11 Genişleyebilir Norm Uzay

Hahn-Banach teoreminin birinci versiyonunu genellemeyi amaçlayarak şu soruyu soralım: Z bir normlu uzay olsun. Verilen her E norm uzay için, F, E'nin altuzayı ve $h : F \to Z$ sürekli operatörü verildiğinde, h'nın

$$||H|| = ||h||$$

eşitliğini sağlayan sürekli ve genişlemesi olan $H : E \to Z$ operatörü var mıdır? Bu güzel sorunun yanıtının evet olaması için gerekli ve yeterli koşul, bir K Stonean uzayı (yani açık her kümenin kapanışı açık olan kompakt Hausdorff uzay) için $Z = C(K)$ olmasıdır. Bu noktada daha detaylı soru sormayın, şu anda konumuz o değil.

İki tanım verelim.

Tanım 1.3. Z bir norm uzay olsun ve şu koşulu sağlasın: E bir norm uzay, F' E'nin altuzayı ve $h : F \to Z$ sürekli fonksiyonel olduğunda h'nin genişlemesi ve $||H|| = ||h||$ eştliğini sağlayan sürekli $H : E \to Z$ operatör vardır. Bu durumda, Z'ye **genişleyebilir** uzay denir.

Tanım 1.4. F normlu uzay olsun ve şu özelliği sağlasın: F, E'nin normaltuzayı ise normu bir olan $P : E \to E$ projeksiyonu vardır. Bu durumda F'ye **projeklenebilir uzay** denir.

Teorem 1.22. *Genişleyebilir norm uzay Banach uzayıdır.*

Kanıt: Z genişleyebilir uzay ve E, Z'nin tamlanışı olsun. Birim operatörün $I : Z \to Z$ ($I(x) = x$) genişlemesi ve $||\overline{I}|| = ||I||$ eşitliğini sağlayan $\overline{I} : E \to Z$ operatör vardır. Buradan $Z = E$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. (izometrikli izomorfik uzaylar anlamında, anlamışınızdır!) □

Teorem 1.23. *Her genişleyebilir uzay projekleşebilir uzaydır.*

Kanıt: ???

Genişleyebilir uzay yapısının Hahn-Banach teoremi ile ilişkisini anlamak için aşağıdaki önsava ihtiyacımız var. Önce bir tanım:

Tanım 1.5. E bir Banach uzayı olmak üzere, $\mathcal{C}$, E'nin kapalı küreler olan bir aile ve $\mathcal{C}$'nin verilen keyfi iki elemanının arakesiti boşkümeden farklı olduğunda $\mathcal{C}$'nin arakesiti boşkümeden farklı oluyorsa, E'ye **ikili arakesit özelliği** olan uzay denir.

Önsav 1.24. *F, ikili arakesit özelliği olan Banach uzayı olsun. E bir normlu uzay, N, E'nin kapalı altuzayı ve $A : N \to F$ sürekli operatör olsun. $w \in E \setminus F$ olmak üzere, $||A|| = ||B||$ olacak biçimde A'nın genişlemesi olan sürekli operatör $B : F + \mathbb{R}w \to F$ vardır.*

Kanıt: Her $y \in F$ için, w ile $A^{-1}(y)$ uzayı arasıdaki uzaklık, $d(w, A^{-1}y)$ olmak üzere,

$$p(y) = ||A||d(w, A^{-1}(y))$$

kuralıyla $p : F \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlansın. Yani,

$$p(y) = ||A|| \inf\{||w - x|| : x \in A^{-1}(y)\}$$

olsun. $p(y) > 0$ olduğunu not edelim. $y_1, y_2 \in F$ olmak üzere,

$$x_1 \in A^{-1}(y) \text{ ve } x_2 \in A^{-1}(y_2)$$

verilsin.

$$||y_1 - y_2|| \leq ||A||||x_1 - w|| + ||A||||x_2 - w|| \leq p(y_1) + p(y_2)$$

eşitsizliği elde edilir. Her $y \in F$ ve $r > 0$ için, y merkezli r yarıçaplı kapalı küme $B(y, p(y))$ olarak gösterilmek üzere,

$$\mathcal{C} = \{B(y, p(y)) : y \in A(N)\}$$

olarak tanımlansın. Her $y_1, y_2 \in A(N)$ için,

$$||y_1 - y_2|| \leq p(y_1) + p(y_2)$$

olması kullanılarak, $\mathcal{C}$'nin keyfi eki elemanının arakesitinin boşkümeden farklı olduğu gösterilebilir. F'nin ikili arakesit özelliği olduğundan,

$$y_0 \in \bigcap \mathcal{C}$$

seçilebilir. Yani, her $y \in A(N)$ için,

$$||y_0 - y|| \leq p(y)$$

olacak biçimde $y_0 \in F$ vardır. Dolayısıyla, her $x \in N$ için

$$||A(x) - y_0|| \leq p(A(x)) \leq ||A||||w - x||$$

eşitsizliği elde edilir. $x \in N$ ve $r \in \mathbb{R}$ için,

$$B(x + rw) = A(x) + ry_0$$

kuralıyla $B : N + \mathbb{R}w$ operatörü tanımlanabilir. B bir operatör ve A'nın genişlemesi olup, ayrıca,

$$||B(x + rw)|| \leq ||A||||x + rw||$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Buradan, B'nin sürekli olduğu ve $||B|| \leq ||A||$ eşitsizliği elde edilir. $||A|| \leq ||B||$ olduğu da açıktır ve dolayısıyla, $||A|| = ||B||$ eşitliği elde edilir. Kanıt tamamlanır. □

Şimdi aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 1.25 (Nachbin [12])**.** *Bir Banach uzayın genişletilebilir olması için gerek ve yeter koşul, ikili arakesit özelliğinin olmasıdır.*

Kanıt: F, Banach uzayı verilsin. E'nin ikili arakesit özelliğinin olduğunu varsayalım. E bir normlu uzay, N, E'nin altuzayı ve $A : N \to F$ sürekli oleretör olsun. $\mathcal{S}$, elemanları

i. N, M'yi kapsayan E'nin altuzayı

ii. $K : N \to F$ sürekli operatör, A'nın genişlemesi ve $||A|| = ||K||$

koşullarını sağlayan (N, K) ikililerinden oluşsun. $\mathcal{S}$ kümesini

$$(N_1, K_1) \leq (N_2, K_2) \Leftrightarrow N_1 \subset N_2 \text{ ve her } x \in N_1 \text{ için } K_1(x) = K_2(x)$$

sıralamasına göre kısmı sıralı küme olarak ele alalım. $\mathcal{S}$'de her zinicirin bir üst sınırının olduğu gösterilebilir. Zorn lemmanın uygulanmasıyla, $\mathcal{S}$'de (N_∞, A_∞) maksimal elemanı bulunabilir. Önsan 13.23 kullanılarak, $N_\infty = E$ olduğu da gösterilebilir. Böylece E'nin genişletilebilir olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi F'nin genişletilebilir olduğunu varsayalım. Her $i \in I$ için, $B(x_i, r_i)$, x_i merkezli r_i yarıçalı kapalı küreyi göstermek için

$$\mathcal{C} = \{B(x_i, r_i) : i \in I\}$$

kümesi verilsin ve $\mathcal{C}$'nin keyfi iki kümesinin arakesitinin boşkümeden farklı olsun.

$$\bigcap_{i \in I} B(x_i, r_i) = \emptyset$$

olduğunu varsayalım. For $x \in \{x_i : i \in I\}$ için,

$$r(x) = \inf\{r_i : x_i = x\}$$

olarak tanımlansın. $r(x) > 0$ olur. (Neden?) Dolayısıyla her $x, y \in \{x_i : i \in I\}$ için,

$$||x - y|| \leq r(x) + r(y)$$

eşitsizliği sağlanır.

$$\mathcal{T} = \{B(x_i, r(x_i) : i \in I\}$$

olarak tanımlsın. $\mathcal{T}$'nin keyfi iki elemanının arakesiti boşümeden farklı (Neden?) olmasının yanında,

$$\bigcap \mathcal{T} = \emptyset$$

olur. (Neden?) $x_0 \in S$ verilsin. Her $y \in F \setminus \{x_i : i \in I\}$ için

$$r(x) = ||y - x_0|| + r(x_0)$$

olarak tanımlayarak, r fonksiyonu F'ye genişletilebilir. Genişletilen bu fonksiyonu yine r ile gösterelim. Her $y \in F$ için $r(y) > 0$ olur.

$$\mathcal{K} = \bigcup\{B(y, r(y) : y \in F\}$$

olarak tanımlayalım. $\mathcal{K}$nın keyfi iki elemanının arakesiti boşkümeden farklı ve her $x, y \in F$ için

$$||x - y|| \leq r(x) + r(y)$$

olur. Üstelik,

$$\bigcap \mathcal{K} = \emptyset$$

olur. Aşağıdaki koşulları sağlayan $p : F \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. (Neden?)

i. $p \leq r$.

ii. $||x - y|| \leq p(x) + p(y)$.

iii. $|p(x) - p(y)| \leq ||x - y||$.

iv. p konveks.

Ayrıca,

v. Her $y \in F$ için $p(y) > 0$: $p(y_0) \leq 0$ olacak biçimde $y_0 \in F$ olsaydı, her $y \in F$ için,

$$r(y) \geq p(y) \geq p(y) + p(y_0) \geq ||y - y_0||$$

olurdu ki, bu durumda

$$y_0 \in \bigcap \mathcal{K} = \emptyset$$

çelişkisi elde edilirdi.

Bunun yanında aşağıdaki koşrlları sağlayan bir Z normlu uzayı vardır (Neden?):

i. F, Z'nin altuzayıdır.

ii. $Z = span(F \cup \{z_0\})$ olacak biçimde $z_0 \in Z \setminus F$ vardır.

iii. Her $x \in F$ için $p(x) = ||x - w||$.

$I : F \to F$ birim operatör olsun. F genişletilebilir uzay olduğundan I'nın normu bir olan fonksiyonel genişlemesi $P : Z \to F$ vardır. P, Z'den Z'ye tanımlı $P(Z) = F$ olan bir projeksiyon olur. $y_0 = P(z_0)$ diyelim. Her $z \in Z$ için,

$$||P(z) - y_0|| = ||P(P(z)) - z_0|| \leq ||P(z) - z_0||$$

eşitsizliği gerçekleşir. Ayrıca, $P(Z) = F$ olması nedeniyle, her $y \in Y$ için,

$$||y - y_0|| \leq ||y - z_0|| = p(y)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan,

$$y_0 \in \bigcap \mathcal{K} = \emptyset$$

çelişkisi elde edilir.

Alıştırmalar

1.13. Teorem 13.25'in kanıtında beş kez "Neden?" sorusu soruldu. Bunların yanıtı çok kolay olmasa da, yanıtlamaya çalışın. Bu konuda detaylı bilgiye [14]'den (8.8) ulaşılabilir.

1.14. K, kompakt Hausdorff uzay olmak üzere, $E = C(K)$ uzayını Riesz uzayı ve norm uzay (supremum normuna göre) olarak ele alalım. E'nin bir altkümesinin sıra aralık olması için gerekli ve yeterli koşulun, kapalı küre olması olduğunu gösterin.

1.15. Bir K kümesinden $\mathbb{R}$'ye tanımlı sınırlı fonksiyonların kümesini $B(X)$ ile gösterlim. supremum normu ile donatılmış $B(X)$ uzayının genişletilebilir olduğunu gösterin.

1.16. K, kompakt Hausdorff uzay olsun. $E = C(K)$ uzayı (Riesz ve supremum normuna göre norm uzay) Dedekind tam ise, genişletilebilir uzay olduğunu gösterin: $\mathcal{S}$, E'nin kapalı kürelerinin bir kümesi ve ikişerli olarak arakesitleri boşkümeden farklı olsun.

$$\mathcal{S} = \{[f_i, g_i] : i \in I\}$$

biçimindedir. Her $i, j \in I$ için $[f_i, g_i] \cap [f_j, g_j]$ kümesi boşkümeden farklı olduğundan, $f_i \leq g_i$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla,

$$g = \sup_{i \in I} g_i \leq \inf_{j \in I} f_j = f$$

olmak üzere,

$$[g, f] \subset \bigcap \mathcal{S}$$

olur. Teorem 13.26'dan istenilen elde edilir.

1.17. $n \geq 2$ doğal sayı olmak üzere, normu Öklid normu olan $\mathbb{R}^n$ norm uzayının genişletilebilir olmadığını gösterin.

1.18. c_0 uzayının genişletilebilir olmadığını gösterin.

1.19. F bir norm uzay olsun ve şu koşulu sağlasın: F, E'nin bir norm altuzayı ise $P(E) = F$ olan sürekli projeksiyon $P : E \to E$ vardır. Bu koşulu sağlayan F norm uzayaına **projeklenebilir uzay** denir.

1.20. Genişletilebilir bir uzayın kapalı altuzayının genişletilebilir olması gerekmediğine ilişik örnek verin.

1.21. Bir norm uzayın dualinin genişletilebilir bir uzayın norm altuzayı olduğunu gösterin.

1.22. Genişletilebilir bir uzayı projeklenebilir altuzayının genişletilebilir uzay olduğunu gösterin.

Kaynakça

[1] S. Banach. Sur les fonctionelles lineaires. *Studia Math.*, 1:211–216, 1929.

[2] S. Banach. *Theorie des operations lineaires.* Chelsa, New York, 1931.

[3] G. Buskes. The hahn-banach theorem surveyed. *Dissertationes Math.*, 327, 1993.

[4] L. Dieudonné. *History of functional analysis,.* Nort-Holand Mathematics Studies, 1981.

[5] S. P. Egnew and A. P. Morse. Extensions of linear functionals, with applications to limits, integrals, measures, and densities,. *Ann. of Math.*, 39:20–30, 1938.

[6] E. Hahn. Ü ber lineare gleichungssysteme in linearen raümen. *J. Reine Angew. Math.*, 157:214–229, 1927.

[7] E. Helly. Über lineare funktionalopreratiónen. *Akad. Wiss. Wien*, 121:265–297, 1912.

[8] E. Helly. Ueber systeme linearer gleichungen mit unendlich vielen unbekann=ten. *Monathsh. fur Math. und Phys*, 31:60–91, 1921.

[9] H. Hochstadt. Eduard helly, father of the hahn-banach theorem. *Math. Intelligencer.*, 2:123–125, 1979/80.

[10] M. Luxemburg, W. Vath. The existence of non-trivial bounded functionals implies the hahn-banach theorem. *Z. Anal. Anwendungen*, 20:267–279, 2001.

[11] S. Mazur and W. Orlics. Sur les espaces métriques linéaires ii. *Studia Math.*, 13:137–179, 1953.

[12] L. Nachbin. A theorem of the hahn-banach type for linear transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 68:28–46, 1950.

[13] L. Narici. On the hahn-banach theorem. *Advanced courses of mathematical analysis*, II:87–122, 2007.

[14] L. Narici and E. Beckenstein. *Topological Vector Spaces*. Pure and Applied Mathematics (Boca Raton), 2011.

[15] A. Pietsch. *History of Banach Spaces and Linear Operators*. Birkhuauser, 2007.

[16] V. Pták. On a theorem of mazur and orlicz. *Studia Math.*, 15:365–366, 1956.

[17] F Riesz. certains syst emes singuliers d equations int egrales. *Ann. Sci. Â ´ Ecole Norm. Sup..*, 28:33–62, 1911.

[18] F. Riesz. *Les syst emes d equations lin eaires a une infinit e d inconnues.* Gauthier-Villars, 1913.

[19] X Riesz. Untersuchungen Â¨uber systeme integrierbarer funktionen. *Math. Ann.*, 69:449–497, 1909.

[20] E. Schechter. *Eric Handbook of analysis and its foundations.* Academic Press, 1997.

[21] X Schmidt. UÂ¨ ber die aufloÂ¨sung linearer gleichungen mit unendlich vielen unbekannten. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 25:53–77, 1908.

Dizin