1. İkili Sitem ve Dual Sistem

E bir topolojik vektör uzay ve E', E uzayının topolojik duali olsun.

$$<,>(x,f) =< x,f >$$

yazmak süretiyle,

$$< x,f >= f(x)$$

kuralıyla $<,>: E \times E' \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlanarak,

$$(E, E', <,>)$$

üçlüsü elde edilebilir. Bu üçlünün temel özelliği, E ve E' uzaylarının vektör uzay olmaları ve $<,>$ fonksiyonunun ikili fonksiyonel olmasıdır. Oluşturulan bu üçlü (ikili sistem olarak adlandırılacak) üzerinden topolojik vektör uzay kavramının birçok özelliği daha geniş bir çerçeve üzerinden anlaşılabilir. Örneğin, aynı vektör uzay üzerinde tanımlı topolojik dualleri eşit olan konveks topolojilere göre konveks kümelerin kapanışlarının eşit olduğu gösterilebilir. (Teorem 16.4.) Dahası, bu tür üçlüler üzerinden konveks uzay kavramı genellenebilir.

Yukarıda verilen ikili sistem, E topolojik vektör uzayı yerine keyfi bir vektör uzay E, E' yerine yine keyfi bir vektör uzay F alınarak ve $<,>: E \times F \to \mathbb{R}$ ikili fonksiyonel olmak üzere, $(E, F, <,>)$ üçlüsüne genellenebilir ve bu üçlü, **ikili sistem** olarak adlanırılır ve genel olarak $< E, F >$ ile gösterilir. $<,>$ fonksiyonuna bu ikilinin dualitesi denir.

Bu bölümde bahsedilen ikili sistem üzerinden inşa edilen konveks uzay kavramı detaylı olarak çalışılacaktır. Üretilen bu topolojiler genel olarak **polar topoloji** olarak adlandırılır. Birçok çeşit polar topoloji üretilebilinmesine karşın, bunlardan

i. zayıf topoloji,

ii. Mackey topoloji,

iii. kuvvetli topoloji,

olarak adlandırılan polar topolojilerle özel olarak ilgilenilecektir. Bu topolojiler arasındaki ilişkiler belirlenirken uzayın,

i. sınırlı,

ii. eş sürekli,

iii. zayıf kompat

olarak adlandırılan altkümeleri ve bunlar arasındaki ilişkiler temel ögeler olacak. $< E, F >$ ikili sistemine göre tanımlanan bu topolojiler, zayıf, Mackey ve kuvvet topolojiler sırasıyla $\sigma(E, F)$, $\tau(E, F)$ ve $\beta(E, F)$ olarak gösterilir, ve aralarındaki temel ilişki,

$$\sigma(E, F) \subset \tau(E, F) \subset \beta(E, F)$$

olup, bunlar arasındaki ilişkiler detaylı olarak çalışılacaktır. Ayrıca, (E, τ), topolojik duali F'ye "eşit" (Tanım 16.14 sonrasında yapılan açıklama anlamında) olan bir konveks uzay ise, τ topolojisinin bir polar topoloji olduğu (Teorem 16.14) ve

$$\sigma(E, F) \subset \tau \subset \tau(E, F) \subset \beta(E, F)$$

kapsamasının sağlandığı gösterilecektir. (Teorem 16.16.)

Konveks uzaylara polar topolojiyle yaklaşım bir çok açıdan fonksiyonel analize modern bir yaklaşım olarak değerlendirilmektedir.

Fonksiyonel analizin önemli teoremlerden biri olan Alaoglu Teoremi 16.7'de verilecektir. Alaoglu teoreminin kullanılmasıyla bir topolojik vektör uzayın birçok yapısı kolaylıkla anlaşılabilir. Örneğin, yukarı paragrafta verilen topolojilerin kapsama ilişkisinin bir kısmının doğruluğu bu teorem kullanılarak gösterilir. Ayrıca, bu teorem aracılığıyla her normlu uzayın $C(K)$ türünde bir Banach uzayın kopya altuzayı olduğunun gösterilebilmesinin yanı sıra, her Hausdorff konveks uzayın bir yerel kompakt Hausdorff uzay K için, $C(K)$ türünde bir konveks uzayın kopya altuzayı olduğu da gösterilebilecektir. Alaoğlu teoremi kullanılarak, başka birçok şeyin yanında, tümüyle düzenli Hausdorff uzayın Stone-Ćech kompaktlamasının bilinen klasik yöntemlerden farklı bir inşası verilebilmektedir. Bunlar, daha sonraki bölümlerin konusu olabilecektir.

Fonksiyonel analizin bir başka önemli teoremi Mackey-Arens teoremi (Teorem 16.6) olarak bilinmekte olup, bu teorem fonksiyonel analize modern bir yaklaşım olarak ele alınan ikili sistemin merkezinde olan bir teorem olarak yorumlanmaktadır. Bu teorem bu bölümde ifade edilip, kanıtı verilecektir.

Bir topolojik vektör uzayda sınırlı her kümenin sürekli her fonksiyonel altındaki görüntüsünün sınırlı olduğu kolaylıkla gösterilebilmesine karşın, bunun tersi genelde doğru olmasa bile konveks uzaylar için doğru olduğu gösterilebilecektir. Daha teknik bir ifadeyle, dualleri eşit olan iki konveks uzayda sınırlı kümelerin aynılığı, yani birine göre sınırlı olan bir kümenin diğerine görede sınırlı olduğu gösterilecek. Bu, **Mackey teorem** (Teorem 16.22) olarak bilinir. Bunun bir sonucu olarak, bir norm uzayda bir kümenin norm sınırlı olması için gerek ve yeter koşulun, noktasal sınırlı olması olduğu gösterilebilir, Banach-Steinhauss teoremi olarak bilinen bu teorem aynı zamanda fonksiyonel analizin gençlik teoremlerinden biri olarak bilinir.

Ayrıca, polar topolojiler arasında tanımlı operatörlerin sürekliliği konusunda temel sonuçlar, bir sonraki bölümün konusu olacaktır.

Bu bölümde verilen teoremlerin uygulamalarına pek yer verilmeyecek olunsa da, sonraki bölümlerde yeri geldiğinde verilecektir.

1.1 İkili Sistem

$E_1, ..., E_n$, n tane vektör uzay olsun. Bu uzayların çarpım vektör uzayına E diyelim, yani,

$$E = E_1 \times ... \times E_n$$

olsun. $F : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Her $a = (a_1, ..., a_n) \in E$ ve $1 \leq j \leq n$ için,

$$F_{j,a}(x) = F(a_1, ..., a_{j-1}, x, a_{j+1}, ..., a_n)$$

kuralıyla tanımlı $F_{j,a} : E_j \to \mathbb{R}$ fonksiyonu lineer ise, F'ye **n-fonksiyonel** denir.

Tanım 1.1 (Dieudonné [4])**.** E ve F iki vektör uzay ve $<,>: E \times F \to \mathbb{R}$ bir 2-fonksiyonel olsun. $(E, F, <,>)$ üçlüsüne **ikili sistem** ve, $<,>$ fonksiyonuna bu sistemin **dualitesi** denir[1].

Aksi bir durum belirtilmediği sürece "$< E, F >$ bir ikili sistem olsun" denildiğinde belirili bir $<,>$ dualite ile dontatılmış $(E, F, <,>)$ üçlüsü kastedilecektir. $< E, F >$ bir ikili sistem olduğunda, $< F, E >$, dualitesi

$$(y, x) \to < x, y >$$

olan bir ikili sistem olur.

Verilen E ve F vektör uzayları için $< E, F >$'yi ikili sistem yapan birçok dualite tanımlanabilir. Bu dualiteler genel vektör uzayların özelliği üzerinden tanımlanabileceği gibi, verilen vektör uzayın kendi özelliği üzerinden de tanımlanabilir. Bazı temel ikili sistem örnekleri aşağıdaki gibi verilebilir.

Örnekler

[1]Bu kavram bağımsız olarak "regular linear systemwas" adıyla 1945 yılında Mackey [8] vermiştir.

1.1. $E = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{R}$ ve $F = \bigoplus_{j \in J} \mathbb{R}$ direkt toplam vektör uzayları ve $A \subset I$, $B \subset J$ boş kümeden farklı olsunlar. Aşağıda $E \times F$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlı fonksiyonlar birer dualite olup, bunlara göre $< E, F >$ birer ikili sistemdir.

  i. $< f, g >= \sum_{(i,j) \in A \times B} f(i)g(j)$.

  ii. $\alpha : A \to B$ bir fonksiyon olsun olmak üzere,

$$< f, g >= \sum_{i \in A} f(i)g(\alpha(i)).$$

1.2. E bir vektör uzay ve F, E'nin cebirsel dualinin altuzayı olmak üzere, $< E, F >$, dualitesi $< x, f >= f(x)$ kuralıyla tanımlı $<,>$ fonksiyon olan bir ikili sistemdir.

1.3. $p, q \geq 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $E = L_p(\mu)$ ve $F = L_q(\mu)$ uzayları üzerinde

$$< f, g >= \int fgd\mu$$

kuralıyla tanımlı fonksiyona göre $< E, F >$ bir ikili sistemdir.

1.4. $< l_p, l_q >$, $(1 < p, q \in \mathbb{R},\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ dualitesi $< x, y >= \sum_n x_n y_n$ olan bir ikili sistemdir.

1.5. E topolojik vektör uzay, E', E'nin topolojik duali olmak üzere, $< E, E' >$, dualitesi $< x, f >= f(x)$ kuralıyla tanımlı fonksiyona göre bir ikili sistemdir. Bu, Örnek 1.2'nin özel bir halidir. $< E, E' >$ ikili sistemine E uzayının **öz dual ikilisi** ve dualitesine de **öz dualite** denilebilir.

$< E, F >$ bir ikili sistem olsun. Sıfırdan farklı her $y \in F$ için

$$< x, y > \neq 0$$

olacak biçimde $x \in E$ varsa, E, F'nin **noktalarını ayırıyor** denir. Benzer biçimde sıfırdan farklı her $x \in E$ için $< x, y > \neq 0$ olacak biçimde $y \in F$ varsa F, E'nin **noktalarını ayırıyor** denir.

Teorem 1.1. *$< E, F >$ bir ikili sistem olsun. F, E'nin noktalarını ayırıysa, E, $\mathbb{R}^F$ vektör uzayının kopya altuzayı olur.*

Kanıt: $\pi(y)(x) =< x, y >$ kuralıyla tanımlı $\pi : F \to \mathbb{R}^E$ fonksiyonu izomorfizmadır. Bu, kanıtı tamamlar. □

$< E, F >$ bir ikili sistem olduğunda, "aynı dualite" ile $< F, E >$ ikilisi de bir ikili sistem olduğundan, yukarıdaki teorem tersi de, doğrudur. Yani, E, F'nin noktalarını ayırıyorsa, E, $\mathbb{R}^F$ uzayının kopya altuzayı olur.

Tanım 1.2. $< E, F >$ bir ikili sistem olsun. E, F'nin noktalarını ve F, E'nin noktalarını ayırıyorsa, $< E, F >$'ye **dual sistem** denir.

İkili sistemin gösterimi ile ilgili bir açıklama: İkili sistem kavramının temel örneği, X bir topolojik vektör uzay ve X', X'nin topolojik duali olmak üzere, dualitesi $< x, f >= f(x)$ olan $< X, X' >$ olduğundan, ikili sistem yaygın olarak $< E, E' >$ ile gösterilebilir. Burada, E', E üzerinde tanımlanan bir vektör topolojinin topolojik duali anlamında değildir. Diğer taraftan, bu ikili sistem üzerinden topolojik duali E' vektör uzayına izomorfik olacak biçimde E'de bir vektör topoloji tanımlanabilir. Dolayısıyla, bu, ikili sistemin $< E, E' >$ ile gösterilmesinin bir haklı nedeni olarak görülebilir.

Alıştırmalar

1.1. E ve F iki vektör uzay, $f \in F^*$ ve $\pi : E \to F$ bir homomorfizma olsun.

$$< x, y >= f(\pi(x))$$

kuralıyla bir $E \times F \to \mathbb{R}$ dualite tanımlanabildiğini gösterin.

1.2. E ve F iki vektör uzay ve $\pi : E \to \mathbb{R}^F$ bir homomorfizma olsun. $< E, F >$'nin

$$< x, y >= \pi(x)(y)$$

kuralıyla tanımlı fonksiyona göre bir ikili sistem olduğunu gösterin.

1.2 İkili Sistemin Zayıf Vektör Topolojisi

Bir ikili sistem üzerinden birçok faklı vektör topoloji tanımlanabilir. Bunun için, önce inşası son derece kolay ve zayıf topoloji olarak adlandırılan bir vektör topoloji, ve sonrasında bunun üzerinden farklı vektör topolojiler tanımlanabilir.

Tanım 1.3. $< E, F >$ bir ikili sistem olsun. Her $y \in F$ için $p_y : E \to \mathbb{R}$ yarınormu,

$$p_y(x) = | < x, y > |$$

kuralıyla tanımlansın. E uzayında $\{p_y : y \in F\}$ yarınorm ailesi tarafından üretilen vektör topolojiye, $< E, F >$ **ikili sisteminin zayıf topolojisi** denir.

$< E, F >$ ikili sisteminin zayıf topolojisi $\sigma(E, F)$ ile gösterilir. E ve F uzaylarını ne olduğun ne olduğu anlaşılıyorsa bu topolojiye **w-topoloji** olarak da ifade edilebilir.

Aşağıdaki teoremin kanıtı okura bırakıldı.

Teorem 1.2. *İkili sistemin zayıf topolojisi bir vektör topolojidir.*

Verilen bir $< E, F >$ ikili sisteminin zayıf topolojisi $\sigma(E, F)$ için aşağıdakiler kolayıkla gösterilebilir.

i. (x_α), E'de bir net ve $x \in E$ verilsin. $\sigma(E, F)$ topolojisine göre $x_\alpha \to x$ olması için gerek ve yeter koşul, her $y \in F$ için

$$< x_\alpha, y > \to < x, y >$$

olmasıdır.

ii. $\sigma(E,F)$ topolojisinin Hausdorff olması için gerek ve yeter koşul, F'nin E'nin noktalarını ayırıyor, olmasıdır. Ayrıca bu,

$$f(x)(y) =< x, y >$$

kuralıyla tanımlı $f : E \to F^*$ fonksiyonun birebir olmasına denktır.

iii. $A \subset E$ altkümesinin $\sigma(E,F)$ topolojine göre sınırlı olması için gerek ve yeter koşul, her $y \in F$ için $\{< a, y >: a \in A\}$ kümesinin sınırlı olmasıdır.

iv. $\sigma(E,F)$ vektör topolojine sıfırın komşuluk alttabanı

$$\{\{x : p_y(x) \leq \epsilon\} : y \in F, \epsilon > 0\}$$

olur. Ayrıca,

$$\epsilon\{x : p_y(x) \leq 1\} = \{x : p_y(x) \leq \epsilon\}$$

olur.

v. $y \in F$ için $y^* : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $y^*(x) =< x, y >$ kuralıyla tanımlansın. $\sigma(E,F)$, her $y \in F$ için y^* konksiyonelini sürekli yapan en küçük topolojidir.

vi. $\pi : E \to \mathbb{R}^F$ fonksiyoneli $\pi(x) =< x, y >$ kuralıyla tanımlansın. $\sigma(E,F)$, A'yı sürekli yapan en küçük topolojidir.

vii. F, E'nin noktalarını ayırıyorsa, $\sigma(E,F)$, $\mathbb{R}^F$ uzayında tanımlı çarpım topolojisinin kopya alt topolojisidir.

Bir ikili sistemin zayıf topolojisine göre sürekli fonksiyoneller, aşağıdaki teoremde olduğu gibi net biçimde anlaşılabilir.

Teorem 1.3. *$< E, F >$ ikili sistem olsun. $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli için aşağıdakiler denktir.*

i. *f, $\sigma(E,F)$ topolojisine göre süreklidir.*

ii. *$f(x) =< x, y >$ olacak biçimde $y \in F$ vardır.*

Kanıt: $ii \Rightarrow i$ olduğu açık.
$i \Rightarrow ii$: f'nin sürekli olduğunu varsayalım. $f^{-1}([-1,1])$ sıfırın komşuluğu olması nedeniyle,

$$f(\{x : \sup_{1\leq i\leq n} | < x, y_i > | \leq 1\}) \subset [-1, 1]$$

olacak biçimde $y_i \in F$ elemanları bulunabilir. Her i için $f_i : E \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli

$$f_i(x) =< x, y_i >$$

kuralıyla tanımlansın. $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} f_i(x)$ ise, her $1 \leq i \leq n$ ve $k \in \mathbb{N}$ için $f_i(kx) = 0$ olacağınan

$$| < nx, y_i > | = 0$$

ve dolayısıyla, $|f(nx)| = 0$, ve buradan da $f(x) = 0$ çıkar, yani

$$\bigcap_{i=1}^{n} ker f_i \subset ker f$$

olduğu gösterilmiş olur. Alıştırma 8.79 gereği,

$$f = \sum_{i=1}^{n} r_i f_i$$

olacak biçimde $r_i \in \mathbb{R}$ sayıları vardır.

$$y = r_1 y_1 + ... + r_n y_n$$

alınarak, her $x \in E$ için

$$f(x) =< x, y >$$

eşitliği elde edilir. □

Alıştırmalar

1.3. (E, τ) bir topolojik vektör uzay olsun. $\sigma(E, F) \subset \tau$ olduğunu gösterin.

1.4.

1.5. X bet vektör uzay ve, E ve F, X^* uzayının X'in noktalarını ayıran altuzay olsun. $\sigma(X, E) \subset \sigma(X, F)$ olması için gerek ve yeter koşulun $E \subset F$ olduğunu gösterin.E ve F iki Hausdorff konveks uzay ve $T : E \to F$ sürekli operatör olsun. gösterin.

  i. Her $y' \in F'$ için $y' \circ T \in E'$.

  ii. T, $\sigma(E, E')$ ve $\sigma(F, F')$ topolojilerine göre süreklidir.

1.6. E bir vektör uzay ve $f_1, ..., f_n \in E^*$ verilsin. $F = \bigcap\limits_{i=1}^{n} ker f_i$ olmak üzere aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

  i. $T([x]) = (f_1(x), ..., f_n(x))$ kuralıyla tanımlı $T : E/F \to \mathbb{R}^n$ operatörü bir izomorfizmadır.

  ii. E/F bölüm uzayı en fazla n boyutludur.

  iii. E'nin sonsuz boyutlu olması için gerek ve yeter koşul F'nin sonsuz boyutlu olmasıdır.

1.7. $< E, F >$ bir dual sistem olsun. Bir önceki alıştırmayı kullanarak aşağıdakilerin denkliğini gösterin.

i. E sonsuz boyutludur.

ii. $(E, \sigma(E, F))$ konveks uzayında sıfırın her komşuluğu E'nin sonsuz boyutlu bir vektör altuzayını kapsar.

1.8. E, topolojik duali sonsuz boyutlu olan topolojik vektör uzay olsun.

$$\bigcap_n \frac{1}{n} U = \{0\}$$

olan her $U \subset E$ kümesinin $\sigma(E, E')$ topolojisine sıfırın bir komşuluğu olamayacağını gösterin. Bunun bir sonucu olarak, E sonsuz boyutlu bir norm uzay ise E'nin sıfırı içeren bir açık küresinin sıfırın $\sigma(E, E')$ topolojisine göre komşuluğu olamayacağını gösterin.

1.9. E Hausdorff konveks uzay ve F, E' uzayının altuzayı olsun.

$$\overline{F}^{\sigma(E',E)} = E'$$

olması için gerek ve yeter koşulun, F'nin E'nin noktaları ayırması olduğunu gösterin.

1.10. E bir norm uzay olmak üzere, E'nin norm topolojisinin zayıf topolojisine eşit olması için gerek ve yeter koşulun, sonlu boyutlu olması olduğunu gösterin.

1.11. $< E, F >$ bir dual sistem ve M, E'nin altuzayı olsun. $\sigma(E, F)$ topolojisinin M'ye indergenmiş topolojisinin $\sigma(M, M')$ topoloji olduğunu, yani

$$i(x) = x \text{ kuralıyla tanımlı } i : (M, \sigma(M, M')) \to (E, \sigma(E, E'))$$

operatörünün homeomorfizma olduğunu gösterin.

1.3 Konveks Uzayın İkili Sistemle Tutarlılığı

Bir topolojik vektör uzayı üzerinde tanımlanan vektör topolojiler farklı olmalarına karşın, topolojik dualleri eşit olabilir. Dualleri eşit olan topolojik vektör uzayları sınıflarken merkezde olan vektör topoloji zayıf topoloji olacaktır, bir başka değişle karşılaştırma zayıf topolojiye göre yapılacaktır. Zayıf topolojinin zayıflığı okuru yanıltmasın!

Tanım 1.4. $< E, F >$ bir ikili sistem olsun ve F, E'nin noktalarını ayırsın. Ayıca, τ, E uzayında bir vektör topoloji olsun. Her $y \in F$ için $f_y : E \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli

$$f_y(x) = < x, y >$$

kuralıyla tanımlansın.

$$E' = \{f_y : y \in F\}$$

ise τ vektör topolojisine ikili sistem $< E, F >$ ile **tutarlı** topoloji denir.

Genel olarak, τ topolojisi $< E, F >$ ikili sistemiyle tutarlı ise,

$$(E, \tau)' = F$$

yazılır. Her topolojik vektör uzayın öz ikili sistemiyle tutarlı olduğu açık.

Bir (E, τ), $< E, F >$ ikili sistemiyle tutarlı ise

$$\sigma(E, F) \subset \tau$$

olacağından, her $A \subset E$ için

$$\overline{con(A)}^{\tau} \subset \overline{con(A)}^{\sigma(E,F)}$$

olacaktır. τ topolojisinin bir konveks topoloji olma durumunda, bu kapsamanın diğer yönü de doğrudur. Yani konveks uzayda bir konveks kümenin kapanışı uzayın topolojik duali üzerinden belirlenebilen bir durumdur. Aşağıdaki teoremin kanıtı Teorem 15.22'in bir sonucu olarak, **konveks küme kapanış teoremi** olarak adlandırılan aşağıdaki teorem verilebilir. Teoremin kanıtının detayları okura bırakıldı.

Teorem 1.4. *τ, $< E, F >$ ikili sistemiyle tutarlı konveks topoloji olsun. Verilen $A \subset E$ konveks kümesinin $\sigma(E, F)$-topolojisine göre kapalı olması için gerek ve yeter koşul, τ topolojisine göre kapalı olmasıdır[2].*

Başka bir ifadeyle bu teoremin dediği şudur: $(E, \sigma(E, F))' = (E, \tau)'$

$$\overline{con(A)}^{\sigma(E,F)} = \overline{con(A)}^{\tau}$$

eşitliği sağlanır.

Boş olmayan bir X kümesi için $\mathbb{R}^X = \prod_{x \in X} \mathbb{R}$ çarpım uzayının bir altkümesinin sınırlı olmasıyla kapanışının kompakt olması denktir. Diğer taraftan, $< E, F >$ ikili sistem ve F, E'nin noktalarını ayırıyorsa, $\sigma(E, F)$ zayıf topolojisi $\mathbb{R}^F$ çarpım uzayının topolojisinin alt kopya topolojisi olduğu kullanılarak, aşağıdaki teoremin kanıtı kolaylıkla verilebilir. Detaylar okura bıralmıştır.

Teorem 1.5. *$< X, Y >$ ikili sistem ve F, E'nin noktalarını ayırsın. $B \subset E$ için aşağıdakiler denktir.*

i. *B, $\sigma(E, F)$-sınırlıdır.*

ii. *Her $y \in F$ için $\{< b, y >: y \in F\} \subset \mathbb{R}$ sınırlıdır.*

iii. *B, $\sigma(E, F)$ topolojisine göre tümüyle sınırlıdır.*

iv. *$\overline{B}^{\sigma(E,F)}$-kompakttır.*

[2]Bunun sonucu olarak bir norm uzayda bir koveks kümenin kapanışıyla zayıf topolojisine göre olan kapanışı eşittir. Bu, norm uzaylar için 1933'de Mazur ([9]) tarafından verilmiştir. Genel hali Bourbaki [3] tarafından verilmiştir.

Alıştırmalar

1.12. $< X, X' >$ ve $< Y, Y' >$ iki dual sistem olsun. $T : X \to Y$ bir operatörü verilsin. X' uzayının X^* uzayının kopya altuzayı ve Y' uzayının Y^* uzayının kopya altuzayı olduğunu not edelim. Gerekirse "kopya altuzayı" yerine "altuzay" olarak ele alarak, $T^* : Y^* \to X^*$ operatörü

$$T^*(f)(x) = f(T(x))$$

olarak tanımlayalım. $T' = T^*|_{Y'}$ olarak tanımlansın. Aşağıdakilerin denkliğini gösterin.

i. $T^*(Y') \subset X'$.

ii. $T : (X, \sigma(X, X')) \to (Y, \sigma(Y, Y'))$ süreklidir.

1.13. $< X, X' >$ ve $< Y, Y' >$ iki dual sistem, ve $T : (X, \sigma(X, X')) \to (Y, \sigma(Y, Y'))$ sürekli olsun.

$$T'(f)(x) = f(T(x))$$

kuralıyla $T' : Y' \to X'$ operatörü tanımlanabilir. (Neden?) $T' : (Y', \sigma(Y', Y)) \to (X', \sigma(X', X))$ sürekli olduğunu gösterin. (X' uzayını X^* uzayının altuzayı ve Y' uzayını Y^* uzayının altuzayı olarak ele alınıyor. Alınmadığı durum içinde uygun bir ayar çekilebilir.)

1.4 Polar

$< E, F >$ bir ikili dual olmak üzere, $A \subset E$ kümesinin **annihilator** kümesi, "Fredholm alternative" olarak bilinen bir kavramla bağlantılı olarak birbirinden bağımsız biçimde Dieudonne (1942) ve and Mackey (1945) tarafından

$$A^{\perp} = \{y \in F :< A, y >= 0\}$$

olarak tanımlanmış olup, bununla ilişkili olarak bir kümenin poları aşağıda verilen tanımda tanımlanmıştır. Bu tanımlamanın arkasındaki gerekçelerin neler olabileceği ile ilgili yaklaşımları okura bırakarak, tanımı verelim.

Tanım 1.5. $< E, F >$ ikili sistem olsun. $A \subset E$ kümesinin **polar**ı,

$$A^{\circ} = \{y \in F : \sup_{x \in A} | < x, y > | \leq 1\}$$

olarak tanımlanır. Benzer biçimde $B \subset F$ kümesinin poları,

$$A^{\circ} = \{y \in F : \sup_{x \in A} | < x, y > | \leq 1\}$$

olarak tanımlanır.

$< E, F >$ bir ikili sistem olmak üzere, $A, B \subset E$ kümeleri için aşağıdakilerin doğruluğu kolaylıkla gösterilebilir.

i. $\emptyset^{\circ} = E$. ($\emptyset \subset E$ olarak).

ii. $A \subset B$ ise $B^{\circ} \subset A^{\circ}$.

iii. Her $r > 0$ için $(rA)^\circ = \frac{1}{r}A^\circ$.

iv. A° mutlak konveks ve $\sigma(E,F)$-kapalı.

v. A, $\sigma(E,F)$ sınırlı olması için gerek ve yeter koşul, A° kümesinin F'de emen olmasıdır.

vi. A emen ise A°, $\sigma(F,E)$ sınırlı.

vii. Her $A \subset E$ için $A \subset A^{\circ\circ}$.

viii. Her $A \subset E$ için $A^\circ = A^{\circ\circ\circ}$.

Ayrıca, (A_i), E'nin alt kümelerinin bir ailesi ise,

ix. $\bigcap_i A_i^\circ = \bigcup_i A_i{}^\circ$.

x. $(\bigcup_i A_i)^\circ \subset \bigcup_i A_i{}^\circ$.

xi. I sonlu ise $(\bigcup_i A_i)^\circ = \bigcup_i A_i{}^\circ$.

$< E,F >$ ve $< F,G >$ ikili sistemlerine göre $A \subset E$ kümesinin **bipolar** kümesi, A'nın $< E,F >$ ikili sistemine göre olan $A^\circ \subset F$ kümesinin $< F,G >$ ikili sistemine göre poları olarak tanımlanır, ve çekinmeden $A^{\circ\circ}$ ile gösterilir. $A \subset E$ kümesinin $< E,F >$ ikili sistemine göre bipolar kümesinden kast edilen $< E,F >$ ve $< F,E >$ikili sistemine göre olan bipolar kümesi olacaktır.

Son derece kullanışlı teoremlerden biri **bipolar teoremi** olarak bilinen aşağıdaki teoremdir.

Teorem 1.6 (Bipolar Teoremi, Dieudonné [7], Dieudonné ve Schwartz [6])**.** *$< E,F >$ ikili sistem olsun ve, F, E'nin noktalarını ayırsın. $A \subset E$ kümesinin $\sigma(E,F)$-kapalı mutlak konveks tamlanışı $A^{\circ\circ}$ kümesine eşittir.*

Kanıt: B, A'nın kapalı mutlak konveks $\sigma(E,F)$-kapalı mutlak konveks tamlanışı olsun. Yani, B, A'yi kapsayan $\sigma(E,F)$-kapalı mutlak konveks kümelerin arakesiti olsun. $A^{\circ\circ}$, A kümesini kapsayan $\sigma(E,F)$-kapalı mutlak konveks küme olduğundan, $B \subset A^{\circ\circ}$ olur. $a \in A^{\circ\circ}$ ve $a \notin B$ olacak biçimde $a \in E$ olduğunu varsayalım. Teorem 15.20 gereği $\{a\}$ ve B daha kuvetli ayrılabilir. Dolayısıyla,

$$\sup_{x\in B} |< x,y >| \leq r < |< a,y >|$$

olacak biçimde $y \in F$ ve $r \geq 0$ vardır. Üstelik $r > 0$ seçilebilir (Neden?) ve $r = 1$ alınabilir. Buradan $y \in A^\circ$ elde edilir. Diğer taraftan

$$1 < |< a,y >|$$

olduğundan, $a \notin A^{\circ\circ}$ olur. Bu çelişkidir. Kanıt tamamlanır. □

Alıştırmalar

1.14. E bir norm uzay ve E', E'nin norm duali olmak üzere aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i E' vektör uzayında

$$||f|| = \sup_{||x|| \leq 1} |f(x)|$$

kuralıyla tanımlı fonksiyon bir normdur.

ii Her $x \in E$ için

$$||x|| = \sup_{||f|| \leq 1} |f(x)|$$

olur.

iii $< E, E' >$, dualitesi $< x, f >= f(x)$ olarak tanımlanan bir dual ikilidir.

iv U, E uzayının kapalı birim küresi ve U, E' uzayının kapalı birim küresi olmak üzere, $U^\circ = V$ ve $V^\circ = U$

1.15. $< E, F >$ bir dual ikili olsun. $A \subset E$ kümesi için aşağıdakilerin denkliğini gösterin.

i A, $\sigma(E, F)$-sınırlıdır.

ii $p(f) = \sup\{| < x, f > | : x \in A\}$ kuralıyla tanımlı $p : F \to \mathbb{R}$ fonksiyonu yarınormdur.

iii $A^\circ \subset F$ emen kümedir.

1.16. $< E, F >$ ikili sistem ve M, E'nin altuzayı olsun.

$$M^\circ = \{y \in M :< M, y >= 0\}$$

olduğunu gösterin.

1.17. $< E, F >$ ikili sistem olsun. $A \subset E$ kümesi verilsin. $A \cup \{0\}$ kümesinin $\sigma(E, F)$ kapalı mutlak konvesk tamlanışının $A^{\circ\circ}$ olduğunu gösterin.

1.18. $< E, F >$ ikili sistem olsun, ve (A_i), mutlak konveks $\sigma(E, F)$-kapalı kümelerin bir ailesi olsun. $(\bigcap_{i \in I} A_i)^\circ$ kümesinin $\bigcup_i A_i^\circ$ kümesinin mutlak konveks tamlanışının $\sigma(F, E)$-kapanışı olduğunu gösterin.

1.19. $< E, F >$ ikili sistem olmak üzere $A \subset E$ verilsin. B, C ve D kümeleri sırasıyla A'nın dengeli, konveks ve mutlak konveks tamalanışı olmak üzere,

$$A^\circ = B^\circ = C^\circ = D^\circ = (\overline{A}^{\sigma(E,F)})^\circ$$

olduğunu gösterin.

1.20. E bir topolojik vektör uzay ve $\mathcal{B}$, sıfırın komşuluk tabanı olsun.

$$\mathcal{B}^\circ = \{B^\circ : B \in \mathcal{B}\}$$

olmak üzere,

$$E' = \bigcup \mathcal{B}^\circ$$

olduğunu gösterin. (polar $< E, E^* >$ dual sistemine göre alınıyor.)

1.21. $< E, F >$ ikili sistem olsun. $A \subset E$ kümesinin **annihilator**ü

$$A^\perp = \{y \in E :< A, y >= 0\}$$

olarak tanımlanan kümedir[3]. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i $A^{\perp}$, F'nin altuzayıdır.

ii $A^{\perp}$, $\sigma(F,E)$ kapalıdır.

iii A vektör altuzay ise $A^{\perp} = A^{\circ}$.

iv $A^{\perp} = [span(A)]^{\circ}$.

iv A, $\sigma(E,F)$ kapalı altuzay ise vektör altuzay $A^{\perp\perp} = A$.

1.22. $< E, F >$ ikili sistem olsun. $A \subset E$ için

$$A^{\odot} = \{y \in F :< x, y >\leq 1\}$$

olarak tanımlansın. $A^{\odot\odot}$ kümesinin $A \cup \{0\}$ kümesinin konveks $\sigma(E,F)$-kapalı tamlanışına eşit olduğunu gösterin. Ayrıca $0 \in A$ ve A, $\sigma(E,F)$-kapalı ve konveks ise $A = A^{\odot\odot}$ olduğunu gösterin.

1.23. Polar kavramı şu şekilde genellenebilir: X ve Y iki boş olmayan kümeler olmak üzere, her $\mathcal{F} \subset \wp(X)$ için,

$$p(\bigcup \mathcal{F}) = \bigcup p(\mathcal{F})$$

eşitliğini sağlayan $p : \wp(X) \to \wp(Y)$ fonksiyonuna bir **polar fonksiyon** denir. Bu anlamda verilen polar fonksiyonu ile Tanım 16.5'de verilen polar kavramı arasında anlaşılabilir bir ilişki kurun.

1.24. Bir norm uzayın kapalı birim yuaraının polarının norm dualinin kapalı birim yuvarına eşit olduğunu gösterin.

1.25. Bipolar teoremi şöyle genellenebilir: $< E, E' >$ bir dual sistem ve F,E'yi kapsayan $(E')^*$ uzayının bir altuzayı olsun. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i $< E', F >$ bir ikili sistemdir.

ii $A \subset E$ kümesinin $< E, E' >$ ve $< E', F >$ ikili sistemlerine göre bipoları, A kümesinin $\sigma(F, E')$-kapalı mutlak konveks tamlanışıdır.

1.5 Alaoglu Teoremi

Fonksiyonel analizin en önemli üç beş önemli enstrümanlardan birinin Alaoglu teoremi olduğu söylenebilir. Bu teoremin uygulanmasıyla,

i Her norm uzayın bir K kompakt Hausdorff uzay için supremum normuna göre $C(K)$- türünde bir Banach uzayın kopya altuzayı olduğu,

ii Her Hausdorff konveks uzayın bir yerel kompakt Hausdorff K için $C(K)$ konveks uzayın kopya altuzayı olduğu,

iii Stone-Cech kompaktlama inşasının yapılabildiği,

gösterilebilir. Bu teoremin uygulamaları elbette bunlarla sınır değil, ancak bütün bunlar bile Alaoglu teoreminin cazibesinin sinyallerini verir. Bunlarla ilgili konular sonraki uygun bölümlerde çalışılacak.

[3]Bu kavram, birbirlerinden bağımsız olarak 1942 yılında Dieudonné ve 1945 yılında Mackey tarafından verilmiştir.

Alaoglu teoremini vermeden önce bir şeyi yine hatırlayalım: $< E, F >$ ikili sistem ve F, E'nin noktalarını ayırsın. $\mathbb{R}^E$ vektör uzayını vektör topolojisi çarpım topolojisi τ olan konveks uzay olarak aldığımızda,

$$\pi(x)(y) =< x, y >$$

dönüşümü altında, τ topolojisinin F'ye olan indirgenmiş topolojinin $\sigma(F, E)$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Yani, $\sigma(E, F)$, τ'nun kopya alt topolojisidir.

E bir topolojik vektör uzay ve E', E'nin dual uzayı olmak üzere, $< x, f >= f(x)$ olarak tanımlanan dualiteye göre $< E, E' >$ bir ikili sistem olur. Hatta bu, E uzayının öz dual ikilisi olarak adlandırılmıştı. (Örnek 16.5.) Ayrıca, E, E' uzayının noktalarını ayırır ve dolayısıyla, E', $\mathbb{R}^E$ vektör uzayının dualite üzerinden tanımlanan izomorfizma ile, bir kopya altuzayıdır.

Teorem 1.7 (Alaoglu [1])**.** *E topolojik vektör uzay ve V, E'de sıfırın bir komşuluğu olsun. V^o, $\sigma(E', E)$- kompakttır*[4].

Kanıt: Her zaman olduğu gibi $< E, E' >$ ikilisini, dualitesi $< x, f >= f(x)$ olan bir dual sistem olarak ele alıyoruz. E, E' uzayının noktalarını ayırır. $\pi : E' \to \mathbb{R}^E$ fonksiyonu

$$\pi(f)(x) = f(x)$$

kuralıyla tanımlansın. π bir izomorfizma olup, E' vektör uzayını $\mathbb{R}^E$ vektör uzayının kopya altuzayı olarak görebiliriz. Ayrıca, $\mathbb{R}^E$ uzayını vektör topolojisi çarpım topolojisi olan topolojik vektör uzay olarak ele alarak aşağıdakiler gerçekleştiği gözlemlenebilir:

i. V°, $\mathbb{R}^E$ uzayında sınırlıdır: $x \in E$ verilsin. V emen olduğundan $x \in r_x U$ olacak biçimde $r_x > 0$ seçilebilir. Dolayısıyla,

$$\{|f(x)| : f \in U^o\} \subset [-r_x, r_x]$$

olur. Buradan,

$$U^\circ \subset \prod_{x \in E} [r_x, r_x]$$

[4] Bu teorem birbirlerinden bağımsız olarak Alaoglu (1 Şubat, [1]) ve Bourbaki (8 Haziran, [2]) tarafından ilan edilmiş ve ilk kanıtı Alaoglu 21 Şubat 1939'da vermiştir. Ayrıca, bu teorem yine birbirlerinden bağımsız olarak 1940 yılında Shmulyan ve 1940 yılında Kakutani tarafından da elde edilmiştir. Yine, bu teoremin bir başka kanıtı Dieudonné 1942 yılında vermiştir. Bu teorem yaygın olarak Banach-Alaoglu ya da Bourbaki-Alaoglu teoremi olarak bilinse de, Pietsch'e göre ([10]) "Ascoli-Hilbert-Fréchet-Riesz-Helly-Banach- Tychonoff-Alaoglu-Cartan-Bourbaki-Shmulyan-Kakutani" olarak ta anılabilir:-) Alaogu teoremi birçok bilinen fonksiyonel analiz kitaplarında konveks uzaylar ifade ediliyor olasa da topolojik vektör uzaylarda geçerli olduğunu vurgulayalım.

elde edilir ki, bu istenileni gösterir.

ii. V°, $\mathbb{R}^E$ uzayında kapalıdır: Açık!

iii. V°, $\mathbb{R}^E$ uzayında kompaktır: V° sınırlı ve kapalı olması nedeniyle, Tychonoff Teoreminin bir sonucudur.

iv. $\mathbb{R}^E$ uzayının topolojisi τ olmak üzere, E' uzayında tanımlı vektör topoloji $\sigma(E', E)$, τ topolojisinin E' uzayına indirgenen topolojidir.

v. V°, $(E', \sigma(E', E))$ uzayında kapalıdır: Kolaylıkla gösterilebilir.

Yukarıdaki gözlemeleden, istenilen kanıtlanmış olur. □

Alıştırmalar

1.26. E, norm uzay ve duali E' olsun. $B = \{x : ||x|| \leq 1\}$ olmak üzere,

i B'nin norm topolojine göre kompakt olması için gerek ve yeter koşul, E'nin sonlu boyutlu olması,

ii B'nin $\sigma(E, E')$-kompakt

1.27. E, norm uzay ve duali E' olsun. $B = \{f \in E' : ||f|| \leq 1\}$ kümesinin $\sigma(E', E)$-kompakt olduğunu gösterin.

olduğunu gösterin.

1.6 Polar Topoloji

Verilen bir ikili sistem üzerinden farklı vektör topolojiler üretilebilir. Her konveks uzay bu tür üretilen topolojilerden birine karşılık gelir. Bu, konveks uzayların yapısını farklı biçimlerde anlamanın yolunu da açacaktır.

16.4 (iv)'de de ifade edildiği gibi, $< E, F >$ bir ikili sistem olmak üzere, $A \subset E$ kümesinin $\sigma(E, F)$ sınırlı olması için gerek ve yeter koşulun, $A^\circ \subset F$ kümesinin emen olması olduğunu not edelim.

Aşağıdaki teoremin kanıtı okura bırakıldı.

Teorem 1.8. *$< E, F >$ bir ikili sistem ve $\mathcal{S} \subset \wp(F)$, F'nin $\sigma(F, E)$-sınırlı kümelerinin bir kümesi olsun. E'de sıfırın alttaban komşuluğu*

$$\mathcal{S}^\circ = \{A^\circ : A \in \mathcal{S}\}$$

tarafından üretilen topoloji, bir konveks topolojidir.

Teoremde geçen topolojiye, $\mathcal{S}$ tarafından üretilen **polar topoloji** denir[5]. Daha vurgulu bir ifadeyle, bu topolojiye $< E, F >$ **ikili sisteminin bir polar topolojisi** denir. Her $A, B \in \mathcal{S}$ için $A \cup B \subset C$ olacak biçimde $C \in \mathcal{S}$ varsa,

[5]Burada, $\mathcal{S}$'nin elemanaları F'nin altkümelerinden oluşmasına karşın, topolojinin E'de tanımlandığına dikkat edilmelidir.

$$\{rA^\circ : A \in \mathcal{S}\},$$

$\mathcal{S}$ tarafından üretilen polar topoloji için sıfırın komşuluk tabanı olacaktır.

Teorem 1.9. *$< E, F >$ bir ikili sistem ve τ, E'de elemanları $\sigma(E, F)$-sınırlı olan bir $\mathcal{S} \subset \wp(F)$ küme tarafından üretilen vektör topoloji olsun.*

$$\mathcal{B} = \{r \bigcap_{i=1}^{n} A_i^\circ : r > 0, A_i \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N}\},$$

τ vektör topolojisi için bir tabandır.

Aşağıdaki teorem birçok açıdan kullanışlıdır. Kanıtı okura bırakıldı.

Teorem 1.10. *$< E, F >$ bir ikili sistem ve elemanları $\sigma(F, E)$-sınırlı olan bir $\mathcal{S}$ küme tarafından üretilen polar topolojiyi $\tau_{\mathcal{S}}$ ile gösterelim. Böyle bir $\mathcal{S}$ kümesi verilsin ve buna bağlı olarak aşağıdaki kümeler tanımlansın.*

i $\mathcal{S}_1 = \{\bigcup_{i=1}^{n} A_i : n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{S}\}$

ii. $\mathcal{S}_2 = \{rA : r \in \mathbb{R}, A \in \mathcal{S}\}$.

iii. $\mathcal{S}_3 = \{[-1, 1]A : A \in \mathcal{S}\}$.

iv. $\mathcal{S}_4 = \{con(A) : A \in \mathcal{S}\}$.

v. $\mathcal{S}_5 = \{\overline{A}^{\sigma(E,F)} : A \in \mathcal{S}\}$.

vi. $\mathcal{S}_6 = \{B : B,$ *bir* $A \in \mathcal{S}$ *kümesinin konveks dengeli kümesinin* $\sigma(E, F)$*-kapanışı*$\}$.

$$\tau_{\mathcal{S}} = \tau_{\mathcal{S}_1} = \tau_{\mathcal{S}_2} = \tau_{\mathcal{S}_3} = \tau_{\mathcal{S}_4} = \tau_{\mathcal{S}_5} = \tau_{\mathcal{S}_6}$$

eşitliği sağlanır.

$< E, F >$ ikili sisteminin $\mathcal{S} \subset \wp(F)$ tarafından üretilen polar topoloji $\tau_{\mathcal{S}}$ bir konveks topoloji olduğundan, bu topoloji bir yarınorm ailesi tarafından üretilen topolojidir. Bu yarınorm ailesinden biri şu şekilde belirlenebilir: Her $A \in \mathcal{S}$ için,

$$p_A(x) = \sup\{| < x, y > | : a \in A\}$$

kuralıyla tanımlanan $p_A : E \to \mathbb{R}$ bir yarınorm olup,

$$p_A(x) = \inf\{r > 0 : x \in rA\}$$

eşitliği de sağlanır. (p_A) yarınorm ailesi tarafından üretilen konveks topoloji, $\tau_{\mathcal{S}}$ topolojisinden başkası değildir.

Küçük bir uyarı: $< E, F >$ ikili sistemine göre $\mathcal{S}$, elemanları $\sigma(E, F)$-sınırlı olan kümelerin bir küme, $\mathcal{S}$ tarafından üretilen polar topoloji, F'de tanımlı, ve benzer biçimde $\mathcal{S}$, elemanları $\sigma(F, E)$-sınırı olan bir küme tarafından üretilen polar topoloji, E kümesinde tanımlıdır.

Aşağıda verilen iki teorem bir polar topolojinin hangi koşullar altında Hausdorff olduğunu söyle. Kanıtlar okura bırakılmıştır.

Teorem 1.11. *$< E, F >$ bir ikili sistem olsun. τ, E'de $\mathcal{S}$ tarafından üretilen bir polar topoloji olsun. $F = \bigcup \mathcal{S}$ ise τ Hausdorff olur.*

Teorem 1.12. *$< E, F >$ bir dual sistem olsun. τ, E'de $\mathcal{S}$ tarafından üretilen bir polar topoloji olsun. τ'nun Hausdorff olması için gerek ve yeter koşul,*

$$\overline{span(\bigcup \mathcal{S})}^{\sigma(F,E)} = F$$

olmasıdır.

Alıştırmalar

1.28. E bir norm uzay, E', E uzayının norm dual uzayı ve E'', E' norm uzayını dual uzayını göstersin. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i $i(x)(f) = f(x)$ kuralıyla $i : E \to E''$ operatörü tanımlanabilir.

ii i bir izometridir. Yani, her $x \in E$ için $||i(x)|| = ||x||$ eşitliği sağlanır[6].

1.29. Bir önceki alıştırmada tanımlanan i izometrisine göre, E'yi E'' norm uzayının kopya altuzayı olarak ele alalım.

$$\overline{\{x \in E : ||x|| \leq 1\}}^{\sigma(E'',E')} = \{x \in E'' : ||x|| \leq 1\}$$

olduğunu gösterin. Bunun sonucu olarak,

$$\overline{E}^{\sigma(E'',E')} = E''$$

olduğunu gösterin.

1.30. $< E, F >$ bir dual sistem olmak üzere, τ, $\mathcal{S} \subset \wp(F)$ tarafından üretilen konveks topoloji olsun. $\bigcup \mathcal{S}$ kümesinin vektör altuzay tamlanış F ise, τ topolojisinin Hausdorff olduğunu gösterin.

1.7 Her Konveks Topoloji Bir Polar Topoloji

Verilen ikili sistem üzerinden polar topoloji tanımlanmış ve her polar topolojinin bir konveks topoloji olduğu ifade edilmişti. Bunun tersi de doğrudur, yani her konveks topoloji bir polar topolojidir.

[6] i operatörü Hahn tarafından 1927 yında tanımlanmıştır, [5].

$< E, F >$ ikili sistem olsun. Bir önceki altbölümde bahsedildiği gibi E'de elemanları $\sigma(F, E)$-sınırlı olan bir $\mathcal{S} \subset \wp(F)$ tarafından üretilen ve polar topoloji olarak adlandırılan bir polar topoloji $\tau_{\mathcal{S}}$ tanımlanabilir. $\mathcal{S}$'nin seçimine göre aşağıda vektör topolojilerin özel bir yeri vardır.

Tanım 1.6. $< E, F >$ ikili sistem olsun. E'de elamanları $\sigma(F, E)$-sınırlı olan bir $\mathcal{S} \subset \wp(F)$ küme tarafından üretilen polar topoloji $\tau_{\mathcal{S}}$, sağladığı özelliklere göre aşağıdaki gibi adlandırılır.

i **Zayıf Topoloji**: $\mathcal{S} = \{\{x\} : x \in F\}$ olma durumunda. Bu durumda $\mathcal{S} = \sigma(E, F)$ olur.

ii **Mackey Topoloji**: $\mathcal{S}$, $\sigma(F, E)$ kompakt ve mutlak konveks kümelerin kümesi ise. Bu durumda $\tau_{\mathcal{S}} = \tau(F, E)$ yazılır.

iii **Kuvvetli Topoloji**: $\mathcal{S} = \{A \subset F : A, \sigma(F, E) - sınırlı\}$ ise. Bu durumda $\tau_{\mathcal{S}} = \beta(E, F)$ yazılır.

Aşağıdaki teoremin kanıtı açık.

Teorem 1.13. *$< E, F >$ ikili sistem olsun.*

$$\sigma(E, F) \subset \tau(E, F) \subset \beta(E, F)$$

olur.

Topolojik dualleri eşit olan iki konvesk uzayda bir konveks kümenin kapanışlarınında eşit olduğunu Konveks Kapanış Teoreminden biliyoruz, yani, (E, τ_1) ve (E, τ_2) topolojik dualleri eşit konveks uzaylar ise, her $A \subset E$ için

$$\overline{con(A)}^{\tau_1} = \overline{con(A)}^{\tau_1}$$

olur. (Teorem 16.4.) Bu teorem kullanılarak aşağıdaki teorem verilebilir ama önce eşsürekli kümenin tanımını hatırlayalım: E ve F iki topolojik vektör uzaylar olmak üzere $H \subset L(E, F)$ verilsin. F'de sıfırın her komşuluğu U için

$$\{h(x) : h \in H, x \in V\} \subset U$$

olacak biçimde E'de sıfırın bir V komşluğu varsa varsa, H'ye **eş sürekli** denir. Eş sürekli küme ile ilgili bazı temel özellikler alıştırmalar kısmında verildi.

Aşağıda verilen teorem için gerekli olanlardan biri şudur: E konveks uzay ve $H \subset E'$ eşsürekli ise $\sigma(E', E)$ sınırlı olur. (Neden?)

Teorem 1.14. *E bir topolojik vektör uzay olsun. E uzayının vektör topolojisi için aşağıdakilerin denkliğini gösterin.*

i *Konvesk topolojidir.*

ii *Bir polar topolojidir.*

iii E' *uzayının eşsürekli alt kümelerinin kümesi tarafından üretilen polar topolojidir.*

Kanıt: $ii \Rightarrow i$ ve $iii \Rightarrow i$ olduğu açık.
$i \Rightarrow ii$: τ'nun konveks topoloji olduğunu varsayalım. E'nin sıfırın komşuluk tabanı mutlak konveks kapalı kümelerden oluşan bir $\mathcal{B}$ tabanı vardır. Dolayısıyla,

$$(X, \sigma(X, X'))' = (X, \tau)'$$

olduğundan, Konveks Kapanış Teoremi gereği her $B \in \mathcal{B}$ için

$$\overline{B}^{\sigma(E,E')} = \overline{B}^{\tau} = B$$

olur. Ayrıca, bipolar teorem gereği $B = B^{\circ\circ}$ olduğunu not edelim. Her $B \in \mathcal{B}$ için, Alaoglu teoremi gereği B°, $\sigma(E', E)$ kompakt olduğundan, B°, $\sigma(E', E)$-sınırlıdır. Dolayısıyla,

$$\mathcal{K} = \{B^\circ : B \in \mathcal{B}\}$$

tarafından üretilen polar topolojinin τ olduğu açıktır.

$i \Rightarrow iii$: $\mathcal{S} = \{H \subset E' : H \text{ eş sürekli } \}$ kümesinin her elemanını $\sigma(E', E)$-sınırlı olduğunu not edelim. $\mathcal{S}$ tarafından üretilen polar topoloji $\epsilon(E', E)$ ile gösterilsin. $H \in \mathcal{S}$ verilsin. Her $f \in H$ ve $x \in V$ için

$$|f(x)| \leq 1$$

olacak biçimde sıfırın komşuluğu V seçilebilir. Buradan, $V \subset H^\circ$ olduğu elde edilir, yani H°, E uzayında sıfırın bir komşuluğudur. Böylece, $\epsilon(E, E') \subset \tau$ olduğu söylenebilir. Şimdi, U, E'de sıfırın bir komşuluğu olsun. $B \subset U$ olacak biçimde sıfırın konveks kapalı komşuluğu B seçilebilir. $B = B^{\circ\circ}$ ve $B^\circ \in \mathcal{S}$ olduğundan, U, $\epsilon(E, E')$ topolojisine göre sıfırın bir komşuluğu olur. Böylece, $\tau \subset \epsilon(E, E')$ elde edilir. Elde edilenlerin birleştirilmesiyle,

$$\tau = \epsilon(E, E')$$

eşitliği elde edilir. Kanıt tamamlanır. □

Alıştırmalar

1.31. E bir topolojik vektör uzay olsun. $H \subset E'$ eşsürekli ise $\overline{H}^{\sigma(E',E}$ kümesinin eşsürekli olduğunu gösterin.

1.32. E bir topolojik vektör uzay olsun. $H \subset E'$ verilsin. Aşağıdakilerin denkliğini gösterin.

i. H eş süreklidir.

ii. $H \subset V^\circ$ olacak biçimde sıfırın bir komşuluğu U vardır.

iii. H°, sıfırın bir komşuluğudur.

1.33. E bir topolojik vektör uzay olsun. $H \subset E'$ eşsürekli ise $\overline{H}^{\sigma(E',E)}$ kümesinin $\sigma(E', E)$-kompakt olduğunu gösterin.

1.8 Mackey-Arens Teoremi

Birçok önemli kaynakta fonksiyonel analizin önemli bir sınıfı olan konveks uzaylara modern yaklaşımlardan birinin ikili sistem üzerinden olduğu ve bu yaklaşımın merkezinde de Mackey-Arens teoremi olduğu yönünde yorumlar bulunmaktadır. Bu altbölümde bu teorem ifade edilerek, kanıtı verilecek.

$< E, F >$ bir ikili sistem ve E, F'nin noktalarını ayırsın. Bu durumda F vektör uzayından E vektör uzayına $y^*(x) =< x, y >$ kuralıyla $y \to y^*$ izomorfizması tanımlanabilir. τ, E üzerinde bir konveks topoloji ve bu topolojiye göre E'nin topolojik duali E' olmak üzere,

$$(E, \tau)' = \{y^* : y \in F\}$$

olması "$(E, \tau)' = F$" ile gösterilecek. Bu gösterim altında aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 1.7. $< E, F >$ ikili sistem olsun ve E, F'nin noktalarını ayırsın. E vektör uzayında tanımlı ve $(E, \tau)' = F$ eşitliğini sağlayan konveks topoloji τ'ya $< E, F >$ **sistemine uyumlu konveks topoloji** denir.

Fonksiyonel analizin önemli teoremlerinden biri olan bir sonraki teoremi vermeden önce teoremin kanıtında kullanılmak üzere bir kaç açıklama yapalım. E bir vektör uzay ve F, E^* vektör uzayının altuzayı olsun ve E, F'nin noktalarını ayırsın. $< E, F >$'yi dualitesi

$$< x, y >= y(x)$$

olan ikili sistem olarak alalım. Ayrıca elimizde $F = E^*$ olarak bir başka ikili sistem $< E, E^* >$ olduğunu not edelim. $A \subset E$'nin $< E, F >$'ye göre polarını A° ile ve özel olarak A'nın $< E, E >$ göre polarını $A^\bullet$ ile gösterelim. Aşağıdakiler gerçekleşir.

i $\sigma(E, F) \subset \sigma(E, E^*)$.

ii $\sigma(E^*, E)|_F = \sigma(F, E)$.

iii $A \subset F$ için $A^\circ = A^\bullet$

Bu gösterimler ve açıklamalar altında aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 1.15 (Mackey-Arens)**.** *$< E, F >$ bir ikili sistem ve E, F'nin noktalarını ayırsın. E'de tanımlı bir konveks topoloji τ için aşağıdakiler denktir.*

i *τ, $< E, F >$ sistemine uyumludur.*

ii *Elemanları mutlak konvenks, $\sigma(F, E)$-kompakt ve bileşimi F olan bir $\mathcal{S} \subset \wp(F)$ altkümesi için τ, $\mathcal{S}$'nin bir polar topolojidir.*

Kanıt: Kanıt, gerekirse F yerine $\{y^* : y \in F\}$ alarak F'yi E^* vektör uzayının kopya altuzayı olmasının ötesinde vektör altuzayı olarak verilecek.

$i \Rightarrow ii$: Bu varsayım altında $E' = F$ olarak alınabilir. (Neden?) $\mathcal{B}$, E'nin mutlak konveks kapalı sıfırın komşuluklarının kümesi olsun.

$$\mathcal{S} = \{B^\circ : B \in \mathcal{B}\}$$

diyelim. Alaoglu Teoremi gereği her $B \in \mathcal{B}$ için B°, $\sigma(E', E)$-kompakt olur. Ayrıca,

$$E' = \bigcup \mathcal{S}$$

olur. Her $B \in \mathcal{B}$ için bipolar teoremi gereği, $B = B^{\circ\circ}$ olduğundan

$$\mathcal{B} = \{B^{\circ\circ} : B \in \mathcal{B}\} = \{A^\circ : A \in \mathcal{S}\}$$

olması nedeniyle, E'nin topolojisi $\mathcal{S}$ tarafından üretilen polar topolojidir.

$ii \Rightarrow i$: E'nin topolojisi τ, elemanları mutlak konveks $\sigma(F, E)$-kapalı alan bir $\mathcal{S}$ kümesi tarafından üretilen topoloji olsun ve $\bigcup \mathcal{S} = F$ eşitliğinin olduğunu varsayalım. Her $r > 0$ ve $B \in \mathcal{S}$ için $rB \in \mathcal{S}$ olduğunu da varsayabiliriz.

$$\mathcal{B} = \{\bigcap_{i=1}^{n} A_i^\circ : n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{S}\} = \{\bigcap_{i=1}^{n} A_i^\bullet : n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{S}\},$$

olup, $\mathcal{B}$, τ için sıfırın bir komşluk tabanıdır. E', E'nin topolojik duali olsun. Alıştırma 16.21 gereği

$$E' = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B^\bullet$$

olduğunu not edelim.

$F \subset E'$: $y \in F$ verilsin. ($y = y^*$ olarak ele aldığımızı hatırlayalım.) $y^* \in A$ olacak biçimde $A \in \mathcal{S}$ vardır. Dolayısıyla, her $x \in A^\circ$ için

$$| < x, y > | = | < x, y^* > | \leq 1$$

olması nedeniyle y^*, A°'de sınırlıdır. A°, τ tolojisinde sıfırın bir komşuluğu olduğundan, y^*, τ topolojisine göre süreklidir. Yani, $y = y^* \in E'$ olduğu gösterilmiş olur.

$E' \subset F$: $E' = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B^\bullet$ olduğundan verilen her $B \in \mathcal{B}$ için $B^\bullet \subset F$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $B \in \mathcal{B}$ verilsin. $\mathcal{B}$'nin tanımı gerği,

$$B = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^\circ = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^\bullet$$

olacak biçimde $A_i \in \mathcal{S}$ kümeleri vardır. Buradan

$$B^{\bullet} = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^{\bullet\bullet}$$

elde edilir. Bipolar Theoremi (Teorem 16.20) gereği, $B^{\bullet}$, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ kümesinin $\sigma(E^*, E)$-kapalı mutlak konveks kapanışıdır. Diğer taraftan, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ kümesinin E^* kümesindeki mutlak konveks tamlanışı

$$C = \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} r_i x_i' : x_i' \in A_i \text{ ve } \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |r_i| \leq 1\}$$

olup, $C \subset F$ olur. Bunun yanında, A_i kümelerinin herbiri $\sigma(F, E)$-kompkat olduğundan, $\sigma(E^*, E)$-kompkat olur. Dolayısıyla, Theorem ??? gereği, C kümesi $\sigma(E^*, E)$-kompkat olur, ve dolayısıyla ($\sigma(E^*, E)$ Haudorff!) C, $\sigma(E^*, E)$-kapalıdır. Buradan

$$B^{\bullet} = C \subset F$$

elde edilerek kanıt tamamlanır. □

Yukarıdaki teorem kullanılarak Mackey-Arens teoremi aşağıdaki gibi de ifade edilebilir. Teoremin kanıtı okura bırakıldı.

Teorem 1.16. *$< E, F >$ bir ikili sistem ve E, F'nin noktalarını ayısın. E'deki bir konveks topoloji τ için aşağıdakiler denktir.*

i *τ, $< E, F >$ sistemine uyumludur.*

ii *$\sigma(E, F) \subset \tau \subset \tau(E, F)$.*

Alıştırmalar

1.34. Bir norm uzayının norm topolojisinin Mackey topolojisine eşit olduğunu gösterin.

1.35. Hausdorff konveks uzayın sonlu boyutlu olması için gerek ve yeter koşulun, zayıf topolojisinin Mackey topolojisine eşi olması olduğunu gösterin.

1.9 Barel Uzay-Kuvvetli Topoloji

Bu altbölümde öncelikle, bir konveks uzayın tanımlanmayı ve çalışılmayı hak eden ve kuvvet topolojisi olarak adlandırılacak konveks topoloji tanımlanacak. Sonrasında, bir Hausdorff konveks uzayın topolojisinin hangi koşullarda kuvvet topolojisine eşit olduğununun yanıtı aranacak. Bunun için bir yanıt, konveks uzayın mutlak konveks, kapalı ve emen her kümenin komşuluk olduğu üzerinden verilebilecek. Böylece, konveks uzaylarda makul bir sınıflama yapılmış olunacaktır.

Tanım 1.8. Bir konveks uzayda kapalı, mutlak konveks ve emen kümeye **barel** denir.

Bir konveks uzayda bir barel kümenin bir komşuluk olması gerekmese de bazı konveks uzaylar için her barel küme, bir komşuluk olur. Bu tür uzaylar çok uzağımızda değil, dizimizin dibinde.

Tanım 1.9. $< E, F >$ bir ikili sistem ve E, F'nin noktalarını ayırsın. $\mathcal{S}$, E'nin $\sigma(F, E)$-sınırlı kümelerin kümesi olsun. E'de $\mathcal{S}$ tarafından üretilen polar topolojiye **kuvvetli topoloji** denir ve $\beta(E, F)$ ile gösterilir. Topolojisi kuvvetli topoloji olan konveks uzaya **kuvvetli konveks uzay** denir.

Bazı ufak tefek hazırlık amaçlı teoremler sonrası barel uzaylarla kuvvetli konveks uzayların çakıştığı gösterilebilir.

Bir konveks uzayda barrel kümeler aşağıdaki gibi karakterize edilebilir.

Teorem 1.17. *Bir konveks uzayın barrel olması için gerek ve yeter koşul, her $w*$-sınırlı kümenin eş sürekli olmasıdır.*

Kanıt: (E, τ) konveks uzay olsun. E'nn barrel olduğunu varsayalım. $H \subset E'$ kümesi $\sigma(E', E)$-sınırlı olsun. H°, mutlak konveks ve $\sigma(E, E')$-kapalı olmasının yanında emen kümedir, yani barel kümedir. Ayrıca,

$$H^\circ = \overline{H^\circ}^{\sigma(E,E')} = \overline{H^\circ}^{\tau}$$

olduğundan, H°, E'de kapalıdır. E'nin barel olması nedeniyle, H°, E'de sıfırın bir komşuluğudur. $r > 0$ verilsin. Her $x' \in H$ ve $x \in rH^\circ$ için $|x'(x)| \leq r$ olacağından, H'nin eşsürekli olduğu gösterilmiş olur.

Tersine her $w*$-sınırlı kümenin eş sürekli olduğunu varsayalım. $U \subset E$ bir barel olsun. $U \subset E^\circ$, $w*$-sınırlıdır. Varsayım gereği $U^\circ \subset E'$ eş sürekli ve dolayısıyla, Alıştırma 16.32 gereği, $U^{\circ\circ}$, E uzayında sıfırın bir komşuluğudur. Diğer taraftan, bipolar teoremi gereği $U = U^{\circ\circ}$ ve dolayısıyla, U sıfırın bir komşuluğudur. Böylece, E'nin bir barrel uzay olduğu gösterilmiş olur. □

E bir topolojik vektör uzay ve E', E'nin dual uzayı olmak üzere, dualitesi $< x, f >= f(x)$ kuralıyla tanımlanmak üzere, $< E, E' >$ ikili sistemine E'nin **öz ikili sistemi** denildiğini hatırlayalım.

Teorem 1.18. *Bir konveks uzayın barel olması için gerekli ve yeterli koşul, topolojisinin öz dual ikilisinin kuvvetli topolojisi olmasıdır.*

Kanıt: (E, τ) konveks uzay olsun. Teorem 16.14 gereği,

$$\mathcal{S} = \{H \subset E' : A \text{ eş sürekli }\}$$

olmak üzere, τ, $\mathcal{S}$ tarafından üretilen polar topolojidir. $< E, E' >$, E uzayının öz dual ikilisi olsun.

E'nin barel uzay oluğunu varsayalım. $H \in \mathcal{S}$ verilsin. Her $x' \in H$ ve her $x \in V$ için $|x'(x)| \leq 1$ olacak biçimde barel komşuluk V bulunabilir. $x \in E$ verilsin. V emen küme olsuğundan, $rx \in V$ olacak biçimde $r > 0$ bulunabilir. Böylece, her $x' \in H$ için

$$|x'(rx)| \leq r$$

eşitsizliği elde ediir, Buradan, H'nin $\sigma(E', E)$ sınırlı olduğu söylenebilir. Kuvvetli topolojinin tanımından

$$\tau \subset \beta(E, E')$$

olduğu hemen elde edilir. Tersine, $A \subset E'$, $w*$-sınırlı, yani $\sigma(E', E)$ sınırlı olsun. Teorem 16.17 gereği, A eşsüreklidir. Bu gözlemden,

$$\beta(E, E') \subset \tau$$

elde edilir. Ve dolayısıyla,

$$\beta(E, E') = \tau$$

elde edilir. Şimdi, $\tau = \beta(E, E')$ olduğunu varsayalım. $A \subset E$ bir barel küme olsun. A'nın emen küme olması nedeniyle A°, $\sigma(E', E)$-sınırlıdır, ve dolayısıyla $A^{\circ\circ}$, $\sigma(E, E')$-kapalı ve $\beta(E, E')$ topolojisine göre sıfırın bir komşuluğudur. Diğer taraftan, bipolar teoremi gereği,

$$A = \overline{A}^{\tau} = \overline{A}^{\sigma(E,E')} = A^{\circ\circ}$$

olur. Dolayısıyla, A, kuvvetli uzayda sıfırın bir komşuluğudur. Kanıt tamamlanır. $\square$

Teorem 1.19. *Barel uzayın topolojisi Mackey topolojidir.*

Kanıt: (E, τ) barel uzay olsun. $< E, E' >$, E uzayının öz dual ikilisi olsun. Yukarıdaki teorem gereği, $\tau = \beta(E, E')$ olur. Ayrıca, E, $< E, E' >$ ikili sistemiyle tutarlı olduğundan, Mackey-Arens teoremi (Teorem 16.6) gereği, $\tau \subset \tau(E, E')$ olur. Diğer taraftan $\tau(E, E') \subset \beta(E, E')$ olmasında nedeniyle $\tau = \tau(E, E')$ elde edilir. $\square$

Aşağıdaki teorem konveks uzayların önemli bir sınıfı olan tam Frechet uzayların (tam metrikleşebilir konveks uzaylar) Barrel uzay olduğu Teorem 16.25'de verilcektir.

Alıştırmalar

1.36. $E = C([0,1])$ vektör uzayını, normu

$$||f|| = \int\limits_0^1 |f(t)|dt$$

olan norm uzay olarak ele alalım. E konveks uzayının Barel olmadığını gösterin.

1.37. Supremum normuna göre,

$$c_{00} = \{f \in \mathcal{N}^{\mathbb{R}} : \{n : f(n) \neq 0\} \text{ sonlu}\}$$

norm uzayının norm topolojisinin barel olmadığını gösterin.

1.38. Genel olarak bir konveks uzayda kompakt kümenin konveks tamlanışının kompakt olması gerekmez. Bazı konveks uzay sınıfları için durum farklıdır: E Hausdorff konveks uzay ve $A \subset E'$, $\sigma(E', E)$-kompakt olsun. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i A'nın kapalı konveks tamlanışı $\sigma(E', E)$-kompakttır.

ii A'nın kapalı mutlak konveks tamlanışı $\sigma(E', E)$-kompakttır.

1.10 Mackey Teoremi

Bir konveks uzayda bir altkümenin sınırlı olmasıyla, sürekli her fonksiyonel altında görüntü kümesinin sınırlı olması arasındaki ilişkiyi ilişki vardır: Bu altbölüme verilen bir dual ilişksiyle uyumlu konveks uzaylarda sınırlı kümelerin aynı olduğu kanıtlanacak. Bunun için bazı öncül teoremlere ihtiyaç olacak.

Teorem 1.20. *Bir topolojik vektör uzayda bir barrel küme her kompakt kümeyi emer.*

Kanıt: E topolojik vektör uzay olmak üzere, E uzayında B barrel ve K konveks kompakt küme olsun. Önce,

$$K \cap (x + V) \subset nB$$

kapsamasını sağlayan $x \in K$, sıfırın komşuluğu V bir $n \in \mathbb{N}$ olduğunu gösterelim: Varsayalım ki bu kapsama gerçekleşmesin. Sıfırın V_0 komşuluğu ve verilen $x_0 \in K$ verilsin.

$$K \cap (x_0 + V_0) \cap (E \setminus B) \neq \emptyset$$

olur. Dolayısıyla,

$$x_1 \in K \cap (x_0 + V_0) \cap (E \setminus B) \neq \emptyset$$

seçilebilir. $K \cap (x_0 + V_0) \cap (E \setminus B)$ boşkümeden farklı açık küme olduğundan,

$$x_1 + \overline{V_1} \subset (x_0 + V_0) \cap (E \setminus B)$$

olacak biçimde sıfırı içeren açık V_1 bulunabilir. Bu şekilde devam ederek,

$$x_n + \overline{V_n} \subset (x_{n-1} + V_{n-1}) \cap (E \setminus nB)$$

olacak biçimde K'da (x_{n-1}) dizisi ve sıfırın açık komşuluk dizisi (V_{n-1}) elde edilebilir. K kompakt ve $(K \cap (x_n + \overline{V_n}))$, K'nın kapalı azalan dizisi olduğundan,

$$y \in \bigcap_n (K \cap (x_n + \overline{V_n})$$

bulunabilir. Buradan, her n için $y \notin B$ elde edilir. Bu, B'nin emen küme olmasıyla çelişr. O halde bahsedilen kapsama gerçekleşebilir. Yani,

$$K \cap (x + V) \subset nB$$

kapsamasını sağlayan $x \in K$, sıfın komşuluğu V ve $n \in \mathbb{N}$ seçilebilir. Buradan,

$$(K - x) \cap V \subset nB - x$$

elde edilir. K kompakt olduğundan $K - x$ sınırlı, ve dolayısıyla,

$$K - x \subset rV$$

olacak biçimde $r \geq 0$ bulunabilir. K konveks ve $0 \in K - x$ olduğundan, her $y \in K - x$ için,

$$\tfrac{1}{r} y = \tfrac{1}{r} y + (1 - \tfrac{1}{r})0 \in K - x$$

olur. Yani,

$$K - x \subset r(K - x)$$

elde edilir. Buradan,

$$K - x \subset r(K - x) \cap rV \subset r(nB - x)$$

ve buradan da,

$$K - x \subset r(nB - x) + x = rnB + (1 - r)x$$

elde edilir. B bir emen küme olduğundan, $(1 - r)x \in sB$ olacak biçimde $s > 0$ da bulunabilir. Bu veriler altında da,

$$K \subset rnB + sB = (rn + s)B$$

olur. Bu, kanıtı tamamlar. □

Teorem 1.21. *Hausdorff konveks uzayda bir barrrel küme sınırlı konveks ve tam olan her kümeyi emer.*

Kanıt: E konveks uzay, B barrel ve K sınırlı konveks ve tam küme olsun. E Hausdorff ve K tam olduğundan, K kümesinin kapalı olacağını not edelim. Kanıtı $0 \in K$ için vermek yeterlidir. (Neden?) B'in K kümesini emmediğini, yani $K \subset nB$ olacak biçimde n doğal sının olmadığını varsayalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{n^2}x_n \notin K$$

olacak biçimde K'da (x_n) dizisi bulunabilir. (x_n) dizisi sınırlı olduğundan

$$\frac{1}{n}x_n \to 0$$

olur. $0 \in K$ ve K konveks olduğundan her n için,

$$\frac{1}{n}x_n \in K$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$H = \{\frac{1}{n}x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subset K$$

kompakt kümedir. E konveks olduğundan, Teorem ??? gereği, H'nin konveks tamlanışı $con(H) \subset K$ tümüyle sınırlıdır. (Teorem???.) Ayrıca, K'nın kapalı olması nedeniyle

$$\overline{con(H)} \subset K$$

olur. Kapalı kümenin tam olan her altkümesi tam olduğundan $\overline{con(H)}$ tam kümedir. Tam ve tümüyle sırlı küme kompakt olduğundan $con(H)$ kompakt kümedir. Teorem 16.20 gereği B, $\overline{con(H)}$ kümesini emer. Diğer taraftan, bu, $\frac{1}{n}x_n \notin nB$ olacak biçimde n olamayacağı varsayımıyla çelişkidir. Kanıt tamamlanır. □

Bu altbölümün esas sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 1.22 (Mackey). *Bir dual ikiliye göre uyumlu Hausdorff konveks uzaylarda sınırlı kümeler aynıdır.*

Kanıt: E bir konveks uzay olsun. Mackey-Arens Teoremi gereği, τ, E'nin topolojisi ve E', E'nin duali olmak üzere,

$$\sigma(E, E') \subset \tau \subset \tau(E, E')$$

olur. E'nin sını her altkümesinin $\sigma(E, E')$-sınırlı olduğu açık. Tersine $\sigma(E, E')$-sınırlı kümenin $\tau(E, E')$-sınırlı olduğu gösterilirse kanıt tamamlanmış olur. (Neden?) $B \subset E$,$\tau(E, E')$ sınırlı olsun. V, $\tau(E, E')$ töpolojisine göre sıfırın mutlak konveks kapalı komşuluğu olsun. Alaoglu Teoremi gereği V°, $\sigma(E', E)$-kompakt olur. B, $\sigma(E, E')$-sırlı olduğundan $\sigma(E', E)$-topolojisine göre $B^\circ \subset E'$ barreldir. Teorem ??? gereği, B°, V° kümesini emer, ve dolayısıyla

$$V^\circ \subset rB^\circ$$

olacak biçimde $r > 0$ bulunabilir. Buradan,

$$\frac{1}{r}B \subset \frac{1}{r}B^{\circ\circ} \subset V^{\circ\circ} = V$$

elde edilir. Böylece, B'nin $\tau(E, E')$-sınırlı olduğu gösterilmiş olur. $\square$

Bu teoremin farklı bir kanıtı farklı bir biçimde verilebilir. (Alıştırma 16.40.)
Bu teoremin uygulanmasıyla aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 1.23. *Her metrikleşebilir konveks uzayın topolojisi Mackey topolojisine eşittir.*

Kanıt: (E, τ), metrikleşebilir konveks uzay olsun. E'nin dual uzayını E' ile gösterelim. (U_n), sıfırın azalan komşuluk tabanı olsun. Önce

$$\tau(E, E') \subset \tau$$

olduğunu gösterelim. Olmadığını varsayalım. Bu durumda $\tau(E, E')$ topolojine göre sıfırın komşuluğu olan, ama τ topolojisine göre sıfırın komşuluğu olmayan konveks $V \subset E$ kümesi bulunabilir. Bu durumda,

$$U_n \subset nV$$

olack biçimde $n \in \mathbb{N}$ yoktur. Dolayısıyla her n için

$$x_n \in U_n \text{ ve } x_n \notin nV$$

olacak biçimde (x_n) dizisi bulunabilir.

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\},$$

τ topolojisine göre sınırlıdır. (Hatta τ topolojine göre $x_n \to 0$ olur.)

$$(E, \tau)' = (E, \tau(E, E')'$$

olduğundan Mackey teoremi gereği (Teorem 16.23) A kümesi $\tau(E, E')$-sınırlıdır. Dolayısıyla,

$$A \subset nV$$

olacak biçimde $m \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan,

$$x_m \in mV$$

çelişkisi elde edilir. O halde, $\tau(E, E') \subset \tau$ olmak zorundadır. Kapsamanın diğer yönü Mackey-Arens Teoreminin (Teorem 16.6) sonucudur. Kanıt tamamlanır. $\square$

Topolojisi tam metrikle belirlenebilen konvesk uzaya **Frechet uzay** denir. Aşğıdaki teoremin kanıtı için şu bilgi gereklidir: Bir tam konveks uzayda tam kapalı ve tümüyle düzenli olan küme kompakttır.

Teorem 1.24. *Frechet uzay barreldir.*

Kanıt: (E, τ) bir Frechet uzay olsun. (U_n), E'de azalan sıfırın komşuluğu olsun. E'nin barrel uzay olmadığını varsayalım. Bu durumda sıfırın komşuluğu olmayan $B \subset E$ barrel kümesi bulunabilir. Dolayısıyla

$$U_n \subset nB$$

olacak biçimde barrel B kümesi yoktur. Her n için

$$x_n \in U_n \text{ ve } x_n \notin nB$$

olacak biçimde (x_n) dizisi bulunabilir.

$$x_n \to 0$$

olduğundan

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$$

kümesi kompakt olur. Böylece $\overline{con(A)}$ tümüyle düzenlidir. (Neden?) Ayrıca tam ve kapalı olduğundan kompakttır. Theorem 16.21 gereği, B, $\overline{con(A)}$ kümesini emer. Dolayısıyla

$$\overline{con(A)} \subset mB$$

olacak biçimde $m \in \mathbb{N}$ bulunabilir. Buradan,

$$x_m \in mB$$

çelişkisi elde edilir. Kanıt tamamlanır. □

Alıştırmalar

1.39. Mackey teoremini kullanarak: E bir norm uzay ve E', E uzayının norm duali olsun. τ, E' norm uzayının topolojisi olmak üzere, aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i $(E, \tau)' = (E, \sigma(E, E'))'$.

ii $A \subset E$ kümesinin τ-sınırlı olması için gerek ve yeter koşul, A'nın $\sigma(E, E')$-sınırlı olmasıdır.

iii (E', τ) uzayında $||f_i|| \to 0$ olması için gerek ve yeter koşul, $\sigma(E, E')$-sınırlı her $A \subset E$ için,

$$p_A(f) = \sup_{x \in A} |f(x)| \to 0$$

olmasıdır.

iv $\tau = \beta(E', E)$.

1.40. Aşağıdaki adımları takip ederek, $< X, X' >$ dual ikilisi için Mackey topolojinin farklı bir kanıtını verin. (Ancak bu kanıtta, Mackey teoreminin özel bir durumu olan $(viii)$'nin bilinmesi gerekmektedir.)

i Her $\tau(X,X')$-sınırlı küme $\sigma(X,X')$-sınırlıdır.

$A \subset X$ $\sigma(X,X')$-sınırlı ve C, boşolmayan,mutlak konveks ve $\sigma(X',X)$-kompakt ve $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} nC$ olmak üzere:

ii E, X' uzayının bir altuzayıdır.

iii E uzayında

$$||x'|| = \inf\{r \geq 0 : x' \in rC\}$$

kuralıyla bir yarınorm tanımlanabilir. E'yi bu yarınorm ile donatılmış uzay olarak ele alıyoruz.

iv $C = \{x' \in E : ||x'|| \leq 1\}$.

v $(E, ||.||)$ bir Banach uzayı.

vi Her $x \in X$ için $\{x'(x) : x' \in E\}$ sınırlı.

vii $A \subset E'$ olduğu varsayılabilir.

viii Bir norm uzayın bir altkümesinin sınırlı olması için gerek ve yeter koşulun noktasal sınırlı olması, olduğunu bilin! Yani, F bir norm uzay ve $A \subset F$ olmak üzere, A'nın norm sınırlı olması için gerek ve yeter koşul, her $f \in F'$ için $f(A)$ kümesinin sınırlı olmasıdır.

ix A noktasal sınırlıdır.

x A norm sınırlıdır.

xi $rA \subset C^\circ$ olacak biçimde $r > 0$ vardır.

xii A, $\tau(X,X')$-sınırlıdır.

1.11 İkinci Dual

Verilen bir $< E, F >$ dual sistemi için E üzerinde birçok konveks topoloji tanımlanabileceği önceki bölümlerede ifade edildi. Ayrıca, $< F, E >$ de bir dual sistem olduğundan F üzerinde de simetrik biçimde konveks topolojiler tanımlanılabilir. E, topolojik duali E' olan, bir Hausdorff konveks uzay olma durumunda, E'nin öz dual sistemi $< E, E' >$ üzerinden E ve E' vektör uzayları üzerine farklı konveks topolojiler tanımlanabilir.

Aksi bir durum olmadığı sürece her norm uzayı konveks topolojisi norm topoloji olan konveks uzay olarak ele alındığını tekrarlayalım. E bir norm uzay ise, E'nin norm duali olarak adlandırılan ve E' ile gösterilen norm uzay, Alıştırma 16.29'de olduğu (belki öncesinden tanımlanmıştır) gibi tanımlanır. E' norm uzayının E'' ile gösterilen norm dualine, E'nin ikinci norm duali E'' denir. Hahn, [5]'de E norm uzayından ikinci dualine,

$$\widehat{x}(f) = f(x)$$

kuralıyla

$$k : E \to E'',\ i(x) = \widehat{x}$$

dönüşümünü tanımlayarak ve bu dönüşümün bir izometrik dönüşüm olduğunu gözlemleyerek, norm uzay kavramına farklı bir bakış açısının kapısını aralamıştır. Bir norm uzayın ikinci norm dualine yapılan bu geçiş, bu kavramı kapsayacak biçimde konveks uzaylar için yapılabilir.

Verilen $< E, E' >$ dual sistem üzerinden tanımlanan $(E', \beta(E', E))$ konveks uzayının duali E'' ile gösterilmek üzere, $< E', E'' >$ bir dual sistem olup, E'' vektör uzayı üzerine, çevresindeki konveks topolojilere uyumlu konveks topoloji konulabilir.

Tanım 1.10. $< E, E' >$ bir dual sistem olsun.

$$E'' = (E', \beta(E', E))$$

olmak üzere, konveks topolojisi $\beta(E'', E')$ olan E'' konveks uzayına E'nin **ikinci duali** denir.

Dikkat edilirse yukarı tanımda E üzerinde herhangi konveks topoloji tanımlanmadan E'nin ikinci topolojik duali tanımlanmış oldu. Bu eksiklik tahmin edileceği gibi şöyle giderilir.

Tanım 1.11. Bir Hausdorff konveks uzayın öz dual sistemi üzerinden tanımlanan ikinci topolojik dualine **konveks uzayın ikinci topolojik duali** denir[7].

Bir E Hausdorff konveks uzayın ikinci duali, $(E', \beta(E', E))$ konvesk uzayının duali olarak tanımlanır. Her Hausdorff konveks uzay doğal dönüşüm olarak adlandırılacak bir oparatör altında ikinci dualinin kopya altuzayı olabilir.

Tanım 1.12. $< E, E' >$ bir dual ikili ve E'', $(E', \beta(E, E'))$ konveks uzayının ikinci duali olmak üzere,

$$\widehat{x}(f) = f(x)$$

kuralıyla tanımlı

$$k : E \to E'',\ i(x) = \widehat{x}$$

operatörüne **doğal dönüşüm** denir[8] denir.

E, Hausdorff konveks uzay olmak üzere, E'den ikinci duali E'' uzayına tanımlanan doğal dönüşüm bir izomorfizmadır. Vurgu açısından bunu teorem olarak ifade edelim.

Teorem 1.25. *Her doğal dönüşum bir izomorfizmadır.*

[7]Bir yanlış alnlaşılma durumu sözkonusu değilse, "ikinci topolojik dual" yerine kısaca "ikinci dual" denildiği de olur.

[8]İngilizce: canonocal maping

Bir Hausdorff konveks uzaydan ikinci dualine tanımlanan doğal dönüşümün hangi koşullar altında bir homeomorfizma olduğunun yanıtı bu altbölümde verilecek.

Bir konveks uzayın ikinci duali (vektör uzay olarak) üzerine, tanımda verilen konveks topolojiden farklı konveks topolojiler de konulabilir. Elbette bu topolojiler başboş olmayacak, işimize yarayacak nitelik ve estetikte olacak. $< E, E' >$ bir dual sistem, τ, bu sistemle uyumlu konveks topoloji ve bu sisteme göre E'', E'nin ikinci duali olmak üzere, aşağıdakiler gösterilebilir.

i. $< E', E'' >$ bir dual sistemdir.

ii. $(E', \sigma(E', E''))' = (E', \beta(E', E))'$.

iii. $A \subset E'$ kümesinin $\sigma(E', E'')$-sınırlı olmasıyla $\beta(E', E)$-sınırlı olması birbirlerinde denktir[9]. (çünkü bu topolojilere göre E' uzayının topolojik dualleri eşit olup, Mackey Teoremi uygulanabilir.)

iv. $A \subset E'$ kümesi $\sigma(E', E'')$-sınırlı ise $\sigma(E', E)$-sınırlıdır. (E, E'' uzayının kopya altuzayıdır.) Bunun tersi belirli koşullar altında doğrudur, Teorem ???

v. $A \subset E'$ ve $B \subset E$ τ-sınırlı küme olsun. A° kümesinin B kümesini emebilmesi için gerek ve yeter koşul, B° kümesinin A kümesini emebilmesidir. (E uzayında sıfırın bir komşuluğunun polarının $\beta(E', E)$ topolojisine göre sıfırın komşuluğu olduğunu not edin.)

vi. $A \subset E'$ verilsin. A'nın $\sigma(E', E'')$-sınırlı olması için gerek ve yeter koşul, A'nın E'deki poları olan A° kümesinin τ-sınırlı her kümeyi emmesidir.

vii. E' kümesinin her eşsürekli altkümesi $\sigma(E', E'')$-sınırlıdır.

viii. $A \subset E'$ mutlak konveks $\sigma(E', E)$-kompakt ise $\sigma(E', E'')$-sınırlıdır.

ix. $\mathcal{U}$, τ için elemanları mutlak konvesk ve kapalı olan sıfırın bir komşuluk tabanı olmak üzere,

$$\mathcal{U}^\circ = \{U^\circ : U \in \mathcal{U}\}$$

ve $\mathcal{C}$, τ topolojisine göre eşsürekli olan E' kümesinin altkümeleri olsun. $\mathcal{U}^\circ$ ve $\mathcal{C}$ kümelerinin her elemanının $\sigma(E', E'')$-sınırlı olduğundan, bu kümelerle E'' vektör uzayında polar topolojiler tanımlanabilir. Diğer taraftan, E'' vektör uzayında $\mathcal{U}^\circ$ ve $\mathcal{C}$ tarafından üretilen polar topolojiler eşitttir. Bu topolojiyi $\tau^{\circ\circ}$ ile gösterelim. Yani, her $U \in \mathcal{U}$ için, U°, $< E, E' >$ ikilisine göre U'nın poları ve $U^{\circ\bullet}$, U° kümesinin $< E', E'' >$ dual sistemindeki poları olmak üzere,

[9]Bu tür kümelere İngilizce olarak **strongly bounded** denir.

$$\{U^{\circ\bullet} : U \in \mathcal{U}\}$$

$\tau^{\circ\circ}$ topolosi için sıfırın komşuluk tabanı olacaktır.

x. Her $U \in \mathcal{U}$ için $U^{\circ\bullet} \cap E = U^{\circ\circ} = U$.

xi. $\tau^{\circ\circ} \subset \beta(E'', E')$ olur.

xii. $\tau = \{E \cap V : V \in \tau^{\circ\circ}\}$.

xiii. $\tau = \{E \cap V : V \in \beta(E'', E')\}$.

xiv. Doğal dönüşüm $i : (E, \tau) \to (E'', \tau^{\circ\circ})$ homeomorfizmadır.

Teorem 1.26. *(E, τ) Hausdorff konveks uzayı için, yukarıda kullanılan gösterimler altında, aşağıdakiler denktir.*

i. $\tau^{\circ\circ} = \beta(E'', E')$.

ii. *E' uzayının $\sigma(E', E'')$-sınırlı her altkümesi eşsüreklidır.*

Kanıt: $i \Rightarrow ii$: $A \subset E'$, $\sigma(E', E'')$-sınırlı olsun. $U \subset E$, sıfırın komşuluğu verilsin. (vi) gereği, A°, U kümesini emer. $U \subset rA^\circ$ olacak biçimde $r > 0$ bulunabilir. $\epsilon > 0$ verilsin. Her $f \in A$ ve $x \in \frac{\epsilon}{r}U$ için,

$$|f(x)| \leq \epsilon$$

olacağından A° kümesinin eşsürekli olduğu gösterilmiş olur.

$ii \Rightarrow i$: $A \in \beta(E'', E')$ verilsin. Tanım gereği, $U^\bullet \subset A$ olacak biçimde $\sigma(E', E'')$-sınırlı olacak biçimde $U \subset E'$ bulunabilir. Varsayım gereği U eşsüreklidir. $\tau^{\circ\circ}$ topolojisinin tanımı gereği (ix), $U^\bullet$, $(E'', \tau^{\circ\circ})$ uzayında sıfın bir komşuluğudur. $U^\bullet \subset A$ olması nedeniyle de A kümesi de $(E'', \tau^{\circ\circ})$ uzayında sıfırın bir komşuluğudur. Böylece, $\beta(E'', E') \subset \tau^{\circ\circ}$ elde edilir. Kapsamanın diğer yönünün de doğru olduğu (xi)'da ifade edilmişti. Sonuç olarak,

$$\tau^{\circ\circ} = \beta(E'', E')$$

eşitliği elde edilir. □

Yukarıda verilen teorem ve (ix) kullanılarak bir Hausdorff konveks uzaydan ikinci dualine tanımlı doğal dönüşümün hangi koşullar altında bir homeomorfizma olduğu aşağdaki teoremle ifade edilebilir. Teoreminin kanıtının detayları okura bırakıldı.

Teorem 1.27. *(E, τ) Hausdorff konveks uzay olsun. Aşağıdakiler denktir.*

i. *E' uzayında $\sigma(E', E'')$-sınırlı her küme eşsüreklidir.*

ii. *Doğal dönüşüm bir homeomorfizmadır.*

Bir konveks uzayın önemli birçok özelliği ikinci duali üzerinden anlaşılabilir. Aşağıda verilen tanımlamalar üzerinden yeri geldiğince kitapta çalışılacak.

Tanım 1.13. (E, τ) Hausdorff konveks uzay olsun. E uzayına doğal dönüşüm

i. örten ise **yarı refleksiv**,

ii. örten homeomorfizma ise **yarı refleksiv**

denir.

Alıştırmalar

1.41. (E, τ) barrell uzayında tanımlı dönüşümün homeomorfizma olduğunu gösterin. ($A \subset E'$, $\sigma(E'', E')$-sınırlı olsun. $\sigma(E'', E)$-sınırlıdır. Dolayısıyla $A^\circ \subset E$ bir emen kümedir. Ayrıca, E barrell ve A° mutlak konveks olduğundan, E'de sıfırın bir komşuluğudur, ve buradan A'nın eşsürekli olduğu söylenebilir. Torem 6.27'den istenilen elde edilir.)

1.42. (E, τ) Hausdorff tam konveks uzay olsun. $A \subset E'$ kümesinin $\sigma(E', E'')$-sınırlı olması için gerek ve yeter koşulun, $\sigma(E'', E)$-sınırlı olması olduğunu gösterin. $A \subset E'$, $\sigma(E'', E)$-sınırlı olsun.

   i. $A^\circ \subset E$ bir barrell küme.
   ii. $A^\circ \subset E$, E'nin tam konves sınırlı kümelerini emer. (Teorem 16. 21.)
   iii. E'de sınırlı her küme tam konveks ve sınırlı bir küme tarafından kapsanır.
   iv. A°, E'nin sınırlı her kümesini emer.
   v. A, $\sigma(E', E'')$-sınırlıdır.

1.43. $< E, E' >$ dual sistemi için aşağıdakilerin denk olduğunu gösterin.

   i. $E = E''$ (doğal dönüşüm birebir ve örten anlamında.)
   ii. $\beta(E', E)$, $< E', E >$ dual sistemiyle uyumludur.
   iii. τ, E'de $< E, E' >$ dual sistemiyle uyumlu konveks Hausdorff uzay ise E'nin τ-sınırlı her altkümesi mutlak konveks $\sigma(E, E')$-kompak küme tarafından kapsanır.

1.44. (E, τ) Hausdorff konveks topolojik uzay olsun. Aşağıdakilerin denkliğini gösterin.

   i. Doğal dönüşüm $i : (E, \tau) \to (E'', \sigma(E'', E'))$ birebir ve örten homeomorfizm.
   ii. Aşağıdakiler gerçekleşir.
      a. E'nin sınırlı her altkümesi bir zayıf kompakt küme tarafından kapsanır.
      b. E' uzayının $\sigma(E', E)$-sınırlı her altkümesi eşsüreklidir.
      c. E' uzayının $\sigma(E', E'')$-sınırlı her altkümesi eşsüreklidir.

1.45. Hausdorff konveks uzayın refleksiv olması için gerek ve yeter koşulun barrell ve sınırlı her kümenin zayıf kompakt küme tarafından kapsanması olduğunu gösterin.

1.46. Bir norm uzayın refleksiv olması için gerek ve yeter koşulun kapalı birim küresinin zayıf kompakt olduğunu gösterin.

1.47. $< E, E' >$ bir dual sistem olsun.

$$k : (E, \sigma(E, E')) \to (E'', \sigma(E'', E'))$$

doğal dönüşümünün homeomorfizma olduğunu gösterin.

1.48. (E, τ) Hausdorff konveks uzay olsun. E'nin yarı refleksiv olması için gerek ve yeter koşulun, E'nin $\sigma(E', E)$-kapalı her altkümesinin $\sigma(E, E')$-kompakt olması, olduğunu gösterin.

1.49. Teorem 16.26 için bir başka denk koşulun

iii. Mutlak konveks, kapalı ve sınırlı her kümeyi emen küme sıfırın bir komşuluğudur.

1.50. Yarı refleksiv olup, refleksiv olmayan konveks uzay örnekleri verin.