Önsöz

Neyi nasıl yapmalı ve nasıl olmalı? Belki de;

Çocukça bir hayal içinde olunmalı!

Bir çocuk havadaki bir bulut parçasıyla ya da bozkırda tek başına yaşayan bir ağaçla dedesi arasında bir ilişki kurabilir. Dedesinin alnının kıvrımlarını bir ırmak yatağına ve kıvrımlardaki ter akışını bir ırmağın akışına benzeterek, o ırmağın içinde yüzebilir, içinde balık yakalayabilir ya da o ırmağı bir okyanusa dökebilir. Tıpkı bulutlara dokunabilmek için dağın tepesine merdiven kuran çocuk gibi. Bundan hem daha akıllıca hem de akılsızca başka ne olabilir ki! Bir çocuk neden bulutlara dokunmak ister? Yanıtı açıktır: İki yaşında buğlanmış pencereye çizdiği resim, üç yaşına geldiğinde onu bulutlara götürecektir; onun için bulutlara dokunmak ister. Sonra, yapacak bir sürü işi vardır; yirmi yaşında çok çetin sevişecek, otuz yaşında büyük patlamaya dokunacak, doksan dört yaşında Tanrı'dan korkmayacak ve doksan yedisinde ölecektir!

Çekici bir kadının diri göğüslerine bebeğinin ve bir delikanlının bakışları arasında farklı farklı "teorik ve pratik" coşkulu beklentiler olabileceği gibi, sonrasında farklı farklı ve beklenmedik sonuçlar da oluşabilir. Sonuçlar "güzel" de olmayabilir; ama nedir ki güzellik? Sınırları belirlenmiş bir yapı özgür ve göreceli olabilir mi? Nedir özgürlük? Özgürlüğü çağrıştıran göreceliliği "güzellik" sınırlarıyla anlamak bir çirkinlik duvarlaştırması mıdır? Yoksa görecelilik bir özgürlük müdür? Bu "baş belası" görecelilik nasıl anlaşılabilir? Bir düşüncenin canlı kanlılığı bu veya benzeri sorgulamalarla derecelendirilebilir mi? Bu karmakarışık düşünceyle, bilgi ve duygusal bakış açısıyla ya da belki de bulutlara merdiven dayayarak soyutlaşan ve annesinin sütünü emerek somutlaşan bir çocuk gibi, canlı olabilmenin ancak zamanın ve hareketin birlikteliğiyle sağlanabileceği ve diğer taraftan zamanın hareketle ölçülebileceği sezgisiyle, bir sonraki paragrafta yer alan açıklamalarla fiziksel hareketi ve zamanı matematikteki bir "şey"e benzetelim. Yani yakınlaştırmaya çalışarak, onun üzerinden, bazı şeyleri anlamaya, yorumlamaya ve dahası, hayal etmeye devam ederek, çaresizlik içinde çaresizliğe meydan okuyalım.

Zaman ve Hareket

Algıladığım kadarıyla fizik kavramı hareket üzerinden tanımlanmaya çalışılır. Hareket ise ölçülebildiğinde anlamlaşan ve sonrasında zaman kavramını üreten bir serseridir. Zaman ve hareketin bir mekanı olmalı mı? Zamanı var eden, tanımlanamayan "andır" ve "an" ise bir "şey"dir ve dolayısıyla, zaman bölünebilir, parçalanabilir olmalı. Aksi halde zaman kaskatı olurdu ve bunun sonucunda, yani zamanın bütünlüğü içinde hareket olmazdı (ama az önce zaman hareketten üretilen bir kavram demiştik... An görecelidir. Dolayısıyla "zaman"ın da göreceli olması muhtemeldir ve yalnız başına tariflenemeyebilir. Belki de zaman saçma sapan bir ifadeyle, bir UFO'dur. Ama "saçma sapan" birşey saçma sapan değildir.). İki fiziksel objenin birbirlerine göre hareketi, birbirleri üzerine uyguladıkları etki sonrasında oluşan değişimin bir çeşit ölçümü olarak tanımlanabilir. Hareket kavramı sadece iki farklı fiziksel obje üzerinden değil, bir grup fiziksel objenin birbirleri üzerine yaptığı etki üzerinden de yorumlanabilir. Bu noktada, "etki" diye devreye giren şeyi anlamak gerekebilir. Bir bakış açısıyla, fiziğin zaman kavramına matematikte süreklilik kavramı karşılık getirilebilir. Matematiksel olarak tanımlı bir X kümesi bir anlamda fiziksel evren olan bir yapı olarak ele alınacak olursa, bu yapı üzerine konulacak topoloji, X'in bir zamanı şeklinde değerlendirilebilir. Dolayısıyla, X üzerine sadece bir tane değil, bir çok *zaman* konulabilir. Ayrıca $X \times X$'ten X'e tanımlı sürekli her fonksiyon bir *yerel zaman* olarak nitelenebilir. X'ten alınan x, y elemanları için x'in y'ye göre hareketi de göreceli olup, bu hareket, $X \times X$'den X'e tanımlı sürekli bir fonksiyona göre, (x, y) ikilisinin görüntüsü olarak tanımlanabilir. x'in y'ye göre zamanı olmalı mı ve olursa nasıl olmalı sorusu ve olası yanıtı da başka bir mesele. Belki de sürekli bir f fonksiyonu için x'in y'e göre zamanı (x, y, f) üçlüsüdür.

Yukarıdaki paragrafta sunulan bakış açısıyla yapılabilecek sorgulamanın; kitabı teknik, felsefe ve hoşgörü anlamında daha kolay anlaşılır yapabileceği ve okurun takibini kolaylaştırabileceği düşünülmüştür. Belki de bu, mantıklı davranış sorumluluğundan kurtulmak için yapılan bir mantıksal açıklama girişimidir. Ancak, bu girişim okuyucu tarafından doğru bulunmasa bile farklı bir boyuta taşınacak bakış açısıyla konu yeniden irdelenebilir. Örneğin, yukarıdaki tanım yaklaşımında zamanı hareket ve hareketi zaman olarak ele alarak ta bir kurgu yaratılabilir. Yaklaşımlar özgürce olmalı. Hatta

Hareket, Zaman, Sonsuzluk, Kızılderili Çadırı ve Simit Parası

başlıklı bir yazıda olduğu gibi, sonsuzluğu bir Kızılderili Çadırına benzetebilecek kadar özgür olunmalı. Hatta daha iler gidip söyle bir şiir yazılabilimeli:

Sevgilim,
hangi dert seni
2+2=4 karşıtı,
2+2=5 tarafı yaptı,
diye soruyorlar.

Derdim;
2+2=4 olduğunun
sürü halinde
haykırılmasıdır.
Sevgilim,
2+2=4
sürülerin matematiğidir,
değerimi
bu şiirde ara.

Fonksiyonel Analiz

Matematik binlerce yıl boyunca

$$0 \neq 1$$

olabilmek için mücadele vermiş olmasına rağmen bunu becerememiş fakat halkı öyle olduğuna emek vermeden ikna etmiş bir yapıdır. Bu gerçeklik içerisinde fonksiyonel analizi tanımlamaya çalışırken bir sürü yanlış yapacağız.

"Analiz" kelimesinin birçok anlamı olup, bu kavram, burada birkaç kelimeyle açıklanamayacak seviyede tarihin çok fazla derinliklerine gider. M. Frechet, [9]'i referans vererek, "Fonksiyonel" kelimesini ilk kullanan matematikçinin 1865-1963 yılları arasında yaşamış Jacques-Salomon Hadamard olduğunu söyler (Fonksiyonel Analiz'in en temel parçası olan Banach uzay kavramının ilk örneği olan bir $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı gerçel değerli fonksiyon uzayı $C([a, b])$ 1903 yılında Hadamard tarafından çalışılmıştır.). Ayrıca bu kelime, [5]'de de yer almıştır. "Fonksiyonel Analiz" kelimesine ise Paul Lévy'nin 1922 tarihli "Leçons de l'analyse fonctionelle" isimli makalesinde yer verilmiştir. Fonksiyonel Analiz teriminin ilk yer aldığı makalelerden birinin de Shmul'yanın 1943 tarihli makalesi olduğu [12]'te belirtiliyor.

Fonksiyonel Analizin, Hilbert'in İntegral Eşitlikleri üzerindeki çalışmaları sonucu inşa edilen fonksiyonel uzay kavramının kategorik isimlendirilmesi olduğu da ifade edilebilir. 1927'de Alman dergisi "Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik", "Funktionalalysis" ismiyle matematiğin bir alt alanını tanımlayarak, fonksiyonel analiz ifadesi resmileşmiştir.

Matematiğin ne olduğuna ilişkin farklı yorumlar[1] yapılabildiği gibi, fonksiyonel analizin ne olduğuna ilişkin bir çok tarif ya da tarif denemesi yapılabilir. Bunlardan birisi, ismi nedeniyle, fonksiyonları araştıran matematiğin bir dalı olarak adlandırılabilir. Ama matematiğin fonksiyonları araştırmayan bir dalı olmadığından, bu türden bir tanımlama nitelikli bir tanımlama olmayabilir. Dolayısıyla tanımlama daha dar bir çerçevede yapılmalı. Dieudonné [3]'de

[1] Ramanujan matematiği renkleri görünmeyen resim olarak yorumluyor.

fonksiyonel analizi, matematiğin topolojik vektör uzaylar ve bir topolojik vektör uzayın altkümesinden bir başka topolojik vektör uzaya tanımlı çeşitli cebirsel ve topolojik koşulları sağlayan fonksiyonların yapısını araştıran bir dalı olarak tanımlanabileceğini söylüyor. Bu yaklaşımın bir sonucu olarak, fonksiyonel analiz cebirsel işlemlerle "uyumlu" bir topolojiyle donatılmış cebirsel yapıları konu alan matematiğin bir dalı olarak da tarif edilebilir. Fonksiyonel analiz örneklerinin büyük çoğunluğu integrallerle verilir. Bu nedenle, fonksiyonel analizin klasik analiz (ölçüm ve integral), cebir ve topolojinin karışımıyla üretilmiş bir yapı olduğu da söylenebilir. Bu ifadede geçen, topolojinin cebirsel işlemlerle uyumlu olması demek o topolojiye göre cebirsel yapının cebirsel işlemlerinin sürekli olması demektir. Bu bağlamda, fonksiyonel analizin cebir ve topoloji arasında temel bir köprü olduğu söylenebilir. Bu bakış açısıyla, topolojik grup, topolojik halka, topolojik modül ve topolojik vektör uzay fonksiyonel analizin birbirlerinden türetilmiş konuları olmakla birlikte, bu kitabın temel konusu büyük oranda topolojik vektör uzaylarla sınırlı tutulacaktır.

Topolojik Vektör Uzay

Bir *topolojik vektör uzay*, cebirsel işlemleri toplama ve skaler çarpma olarak adlandırılan, cebirsel işlemlerle "uyumlu" bir topolojiyle donatılmış, cebirsel bir yapıdır. Topolojik vektör uzayın topolojisine *vektör topoloji* denir.

Topolojik vektör uzay kavramının barındırdığı en temel parçalardan biri topolojik gruptur. Bu nedenle, fonksiyonel analizi topolojik vektör uzay üzerinden anlamak için izlenecek yollardan öncelikli olan, topolojik grup kavramını çalışmak olabilir. Bu kitapta kısmen bu yol izlenmiş ve öncelikli olarak, ilk birkaç bölümde topolojik grup işlenmeye çalışılmıştır. Her vektör uzayın değişmeli grup olması ve kitabın amacı açısından, değişmeli topolojik grupların çalışılması yeterli olsa da bunun dışına çıkılarak, bazı temel sonuçlar, değişmeli olması gerekmeyen gruplar üzerinden verilmiştir. Bununla birlikte, değişmeli grup üzerinden elde edilen topolojiyle bağlantılı sonuçların, grubun değişmeli olması gerekmeyen durumlarda da elde edilip/edileyemeyeceği gibi soruların okurlarca irdelenmesi beklenebilir.

Topolojik vektör uzay kavramını takip edebilmek için, vektör ve topolojik uzay kavramlarının bilinmesi gerekir. Kitapta vektör uzay kavramına daha detaylı yer verilmekle birlikte, okurun topoloji kavramına daha aşina olduğu varsayılarak, bu kavram kitabın ek giriş kısmında temel düzeyde verilecektir. Her vektör uzay direkt toplam vektör uzay olarak adlandırılan yapıyla temsil edilebilir. Bu yapıdan Bölüm 7'de bahsedilecektir.

Temel Örnekler ve Sınıflamalar

Şu anda bakıldığında, fonksiyonel analiz kavramının temel örneğinin 1903'te Hadamard tarafından çalışılan ve $C([a, b])$ ile gösterilen $[a, b]$ kapalı aralığından gerçel sayılara tanımlı ve $C([a,b])$ olarak gösterilen sürekli fonksiyonlar uzayı olduğunu tekrarlayalım. Diğer temel örnekler ise dizi uzaylarıdır. Noktasal cebirsel işlemler altında tanımlı gerçel değerli dizi vektör uzayının herhangi bir vektör altuzayına **dizi uzayı** denir. Dizi uzayları üzerine "ben buradayım" doğallığında vektör topoloji konularak topolojik vektör uzay yapılırlar. Bazı standart dizi uzaylarının listesi aşağıdaki gibi verilebilir:

i. s, gerçel değerli dizi uzayı,

ii. l_∞, sınırlı dizi uzayı,

iii. c, yakınsak dizi uzayı,

iv. c_0, sıfıra yakınsak dizi uzayı,

v. l_p, $p > 0$ olmak üzere terimlerinin mutlak değerinin p'inci kuvveti dizisinin toplanabilir olan dizi uzayı.

Fonksiyonel analiz kavramının temel gelişim yönlerinden biri dizi uzaylarının genelleştirilmesi üzerinden olmuştur. Bu, dizi uzaylarının bazılarına bir topolojik uzayda tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı karşılık getirilmesine karşın, bazılarına da integrallenebilir uzayın karşılık getirilmesi biçimindedir. Örneğin, temel kavram ve standart gösterimlerin bilindiği varsayımıyla $X = \mathbb{N}$ ayrık topolojik uzay ve μ, X üzerinde sayma ölçümü göstermek üzere, aşağıdaki eşitlikler verilebilir:

i. $s = C(X)$,

ii. $l_\infty = C(\beta X)$,

iii. $c = C(X_\infty)$,

iv. $c_0 = \{f \in C(X_\infty) : f(\infty) = 0\}$,

v. $l_p = L_p(\mu)$,

Burada βX, X uzayının Stone-Ćech kompaktlamasını ve X_∞ ise X uzayının bir nokta kompaktlamasını göstermektedir. Bu gözlemler sonrası, topolojik vektör uzaylara bir "sonraki temel örnekler" tartışmasız olarak sürekli fonksiyon uzayları (örneğin $C(K)$ uzayları) ve bir ölçüm uzayı üzerinde tanımlı çeşitli biçimlerde integrallenebilen fonksiyon (örneğin L_p $(0 \leq p \leq \infty)$ uzayları olacaktır. Elbette bu tür örneklere ilaveten çarpım uzayı cinsinden, örneğin $C(K)$ ve $L_p(\mu)$ uzaylarının çiftleşmesiyle $C(K) \times L_p(\mu)$ gibi "melez" uzaylar ve müteakiben, melezlerin melezleri uzaylar da elde edilebilir. Bu nedenle, fonksiyonel analizi anlayabilmek için, öncelikli olarak süreklilik ve integral kavramını anlamak gereklidir. Bu kitapta ölçüm ve integrallenebilirlik kavramlarına detaylı olarak yer verilmeyecek olsa da bu kavramlara gerektiği ölçüde ve temel düzeyde yer verilecektir.

K kompakt Hausdorff uzay olmak üzere $E = C(K)$, noktasal cebirsel işlem ve noktasal sıralamaya göre bir Riesz uzayı olmasının yanında supremum normuna göre bir Banach latis olur. Bu uzayın normu bir M*-normdur*, yani $x \wedge y = 0$ olan her $x, y \in E$ için

$$||x + y|| = \max\{||x||, ||y||\}$$

eştliği sağlanır. Bu eşitlik $C(K)$-türü uzayların genellemesinin sınırlarını belirler, yani normu bir M-norm olan her Banach latis bir K kompakt Hausdorff uzayı için $C(K)$ uzayının bir altuzayı ile eşyapılıdır. E bir Riesz uzayı ve

$$E = \{x : |x| \leq re \text{ olacak biçimde } r > 0 \text{ var}\}$$

ise $e \in E$'ye E'nin *sıra birimi* denir. Sıra birimli ve normu M-norm olan her Banach latis bir $C(K)$ uzayı ile eşyapılıdır.

Benzer biçimde bir ölçüm uzayı (X, Σ, μ) ve $p \geq 1$ için $L_p(\mu)$ uzayı noktasal cebirsel işlem ve noktasal sıralamaya göre bir Banach latis olup, normu p-toplamsaldır, yani $x \wedge y = 0$ olan her $x, y \in E$ için

$$||x + y||^p = ||x||^p + ||y||^p$$

eşitliği sağlanır. Diğer taraftan normu p-toplamsal olan her Banach latis bir $L_p(\mu)$-uzayı ile eşyapılıdır.

E bir Banach uzayı olsun. E'nin bir $C(K)$-uzayına eşyapılı olması için gerek ve yeter koşul E'nin norm dualinin bir $L_1(\mu)$ uzayına eşyapılı olmasıdır. Benzer biçimde E'nin bir $L_1(\mu)$ uzayına eşyapılı olması için gerek ve yeter koşul E'nin norm dualinin bir $C(K)$-uzayına eşyapılı olmasıdır.

$C(K)$ ve $L_p(\mu)$ tür örneklerin fonksiyonel analiz için temel örnekler olduğu dikkate alındığında topolojik uzay ve ölçüm-integral kavramlarının fonksiyonel analiz için temel ögeler olduğu söylenebilir.

Kitapta yukarıda belirtilen temsil teoremlerine yer verilmeyecektir. Bunun nedenlerinden biri, kitabın hacmini kontrol altında tutmaktır. Bu, kitabın çok önmli bir eksikliğidir.

Yaklaşım Tarzı

Topolojik vektör uzay kavramının anlatımına farklı biçimlerde yaklaşılabilir. Örneğin, normlu uzaylarla başlanması gibi bir yaklaşım olabilir ki nitekim tarihsel gelişim sıralaması da böyledir. Diğer bir yol ise doğrudan ve daha genel olarak topolojik vektör uzaylarla başlanmasıdır. Bu yolun takip edilmesiyle normlu uzay bölümü öncesi, normlu uzayların temel örneğini konu alan bir bölüm verilebilir. Bunun bir karmaşa yaratmayacağı düşünülmekte çünkü normlu uzaylarla ilgili bölüme varıncaya kadar normlu uzaylara gereken düzeyde inilecektir.

Bu kitapta genel olarak topolojik vektör uzaydan başlanarak daha özel uzaylara geçiş yapılacaktır. Bu yaklaşım eğitsel açıdan "tepeden inme" riski barındıran bir yöntem olsa da cezbedici yanları da vardır. Elbette bu değerlendirme okura göre farklılaşacaktır.

Topolojik vektör uzaylar aşağıdaki gibi temel alt sınıflara ayrılabilir:

i. Metrik topolojik vektör uzay,

ii. Norm topolojik vektör uzay,

iii. Konveks uzay.

Bu yapılar kitapta işlenecektir. Metriklenebilir her topolojik vektör uzayın konveks uzay olması gerekmezken, her normlanabilir topolojik vektör uzay bir konveks uzaydır. Ama bunun tersi genelde doğru olmayabilir.

Genelde topolojik vektör uzayın Hausdorff olduğu varsayılır. Bu varsayımın gerekçelerinden biri, topolojik vektör uzayın Hausdorff olmasının T_0 olmasına denk olmamasıdır. Diğer taraftan, Hausdorff olmayan topolojik vektör uzaylar, uzayın kapalı altuzayı ve bölüm uzayı terimiyle elde edilebilir: E topolojik vektör uzay ve M, E'nin bir altuzayı olmak üzere E/M uzayı bir topolojik vektör uzay olup, bu uzayın Hausdorff olması için gerek ve yeter koşul M'nin kapalı olmasıdır. Dolayısıyla $E/\overline{\{0\}}$ bölüm uzayı Hausdorff olup, bu uzay ile E'nin birçok özelliğinin aynı olmasından dolayı, topolojik vektör uzayların Hausdorff olduğunu varsaymanın makul bir gerekçesi olarak görülebilir. Burada geçen "topolojik vektör uzay" yerine "topolojik grup" alındığında da bu sonuçlar geçerli olacaktır.

Dual ve Hahn-Banach Teoremi

Bir vektör uzayda skaler çarpma ve toplama işlemlerini koruyan reel değerli fonksiyona *fonksiyonel* denir. Fonksiyonellerin kümesi noktasal işlemlere göre bir vektör uzay olup, bu uzaya vektör uzayın *cebirsel duali* denir. Topolojik vektör uzaylarda sürekli fonksiyonellerin kümesi cebirsel dualin bir vektör altuzayı olup, bu altuzaya topolojik vektör uzayın *topolojik duali* denir. Sıfırdan farklı vektör uzayın cebirsel duali sıfırdan farklı olmasına karşın topolojik vektör uzayın topolojik duali sıfır olabilir; bu tür uzaylarla ilgili örneklere kitapta verilmiştir. Topolojik duali sıfır olan topolojik vektör uzayları çalışmak çok da tercih edilen bir durum değildir. Bu nedenle, topolojik duali her zaman sıfırdan farklı olan ve konveks uzay olarak adlandırılan topolojik vektör uzaylar bu kitabın esas konusu olacaktır. Artık halka mal olmuş olan bazı konveks uzayların topolojik duallerinin ne tür uzaylar olduğu da zaman zaman belirlenecek.

Sıfırdan farklı bir topolojik vektör uzayda sıfırdan farklı sürekli fonksiyonellerin olduğunu söylemek kolay olmasa da Minkowski Fonksiyoneller başlıklı Altbölüm 9.4'te, sıfırın belirli özelliklerini sağlayan komşuluklar üzerinden, Minkowski fonksiyonel olarak adlandırılan fonksiyonlarla, sıfırdan farklı altlineer fonksiyoneller ve sürekli yarınormların var olduğu söylenebilir. Buradan hareketle sıfırdan farklı konveks uzaylarda sıfırdan farklı sürekli yarınormların olduğu söylenmiştir. Dahası, bu uzaylarda sıfırdan farklı sürekli fonksiyonellerin olduğunu söyleyebilmek için *Hahn-Banach Teoremi* olarak adlandırılan teoreme ihtiyaç duyulacaktır. Bu, Bölüm 11'de detaylı olarak çalışılmıştır.

Sıfırdan farklı her konveks uzay ve onun topolojik dualinden oluşan ikili; belirli özellikleri sağlayan, iki vektör uzaydan oluşan *dual ikili* olarak adlandırılan kavrama temel örnektir. Dual ikililer kullanılarak rengarenk konveks uzaylar tanımlanabilir. Bu durum, topolojik duali sıfırdan farklı olan topolojik vektör uzayların tercih edilmesini bir ölçüde açıklar.

Pozitiviti

Fonksiyonel analizin temel örneklerinden ikisinin sürekli fonksiyonlar uzayı ve integrallenebilir fonksiyonlar uzayı olduğu ifade edildi. Bu tür uzaylarda noktasal sıralama olarak adlandırılan son derece doğal bir sıralama vardır. Hatta bu sıralamaya göre bu uzayların çoğu bir latistir, yani sonlu altkümelerinin supremumu ve infimumu vardır. Bu yapı Riesz uzayı adı altında çalışılır. Daha genel olarak, bu konu *pozitiviti* olarak bilinen kavramın bir altdalını oluşturur. Fonksiyonel analizin bir altdalı olan Riesz uzay kavramının etkin olarak kullanılması, fonksiyonel analizin hem daha derin hem de daha kolay anlaşılmasını sağlayacaktır. Buna rağmen Riesz uzay kavramının getirdiği kolaylık bu kitapta etkili olarak kullanılamamıştır!

Yaşasın "Eksiklik"

Kitapta temel olarak iki tür "eksiklik" bulunmaktadır. Bunların birincisi teknik içerik eksikliğidir. Bu eksiklik kitabın adına "Fonksiyonel Analiz" yerine "Fonksiyonel Analiz I" diyerek giderilmeye çalışılmıştır. İkinci eksiklik yazarın bu konudaki acemiliğinden kaynaklanmaktadır. Yazar, acemiliğini ve yetersizliğini yazdıkça anlayabilmiştir ama ne yapılırsa yapılsın eksikliğin hiç zaman bitmeyeceğinin de farkına varmıştır. Yaşasın kitabın eksikliği!

Ve Diğerleri

Birinci bölümde, her biri matematikte derin kavramlar olan ama bu derinliğe girmeden, fonksiyonel analiz kullanımlık temel bilgiler verildi. Bunlarla ilgili çok fazla örnek verilmedi. Bu bölümün uzunluğu diğer bölümlere göre biraz fazla oldu!

Bir matematik kitabında, kavramların ve teknik bilginin bir arada olması kitabın bütünlüğü açısından yerinde bir yaklaşım olarak değerlendirilebilir. Bununla birlikte, bir teoremin kanıtında kullanılan teknik bilgileri de bulundurması güç olabilir. Bu kitapta bu denge mümkün olduğu kadar sağlanmaya çalışılacaktır. Örneğin, topolojik vektör uzaylar için teknik detaylarıyla verilen bazı sonuçların topolojik grup ya da topolojik halkalara genellenebileceğinden bahsedilebilir. Ancak bunlarla ilgili kanıtların teknik detaylarına girilmeyebilir.

Kitapta bazı kavramların tanımları çok az farklılıklarla da olsa tekrarlı verilmiş olabilir. Örneğin, norm kavramı Bölüm 13'te daha detaylı verilmiş olsa da daha önceki bölümlerde gerekli ölçülerde tekrarlı verilmiş olabilir. Bu yaklaşım herhangi bir karmaşa yaratmadığı gibi, bazı kolaylıklar da sağlamaktadır.

Kitapta konu sıralamalarının kısmen de olsa "problemli" olduğu düşünülebilir. Örneğin, vektör uzay kavramı ya da Riesz uzay kavramları tanımlanmadan önce "...Riesz uzayıdır" denildiği olmuştur. Ama bu durumun okur için problem yaratmayacağını ve anlayışla karşılanacağını düşünüyoruz. Zaten bir matematik kitabının bir baştan, bir sondan okunduğu söylenir!

Matematikte birçok kavramın tanımı ve notasyonları standart olmasına karşın (örneğin, topolojinin, kısmi sıralı kümenin tanımları, $\mathbb{R}$ ya da $\int$ notasyonları), bunlardan bazıları standart olmayabilir, hatta bazıları birkaç kullanımlık olabilir. Örneğin, kısmi sıralı kümede, x ve y elemanlarının supremumu $x \vee y$ ile gösterilebilirken, bu notasyon mantık dilinde ve geometri dilinde farklı anlamlarda kullanılıyor olabilir. Ayrıca, bazı kavramlar çok standart olmakla birlikte, Türkçe karşılıkları tam yerleşmemiş olabilir. Bu nedenle, yazar olarak, tanımlamalarda ve notasyon gösterimlerinde kısmen tedirginlik yaşadığım söylenebilir. Standartlaşmış ya da çok iyi bilinen kavramlar ve notasyonlar verilmeyebilir. Ancak, daha az bilinenler tanımlanarak indeks kısmında verilmiştir.

Bazı gösterimlerde kısalık açısından tembellik yapılmış olabilir. Örneğin, $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$\text{“her } x, y \in A \text{ için } f(x) + f(y)\text{”}$$

yerine

$$\text{“her } x, y \text{ için } f(x) + f(y)\text{”}$$

yazılabilir. Benzer biçimde, bir yanlış anlaşılma durum yoksa "Her $n, m \in \mathbb{Z}$" ifadesi yerine, n ve m tamsayı dışında başka durumu sözkonusu olamayacağı gerçekliği üzerinden, "Her n, m" yazılmış olabilir. Okurun bunların farkında olduğu varsayılmıştır.

Kullanılan kavramlar hakkında detaylı olmasa da tarihsel bilgiler verilmeye çalışılmıştır. Bu bilgiler esas kaynağından değilse de güvenilir kaynaklardan alınmaya çalışıdı. Örneğin, kitabın konusunun temel bir öznesi olmayan "groupoid" kelimesi hakkında bile, dipnotta "Brandt semigroup olarak da bilinen bu kavram 1927'de Heinrich Brandt tarafından verilmiştir" ifadesi yer almasına karşın, Brandt'ın esas çalışması üzerinden herhangi bir teyit yapılmamıştır.

Matematiksel tanımlamalarda kullanılan terminoloji Türkçede standartlaşmış olmadığı gibi İngilizce kaynaklarda dahi az da olsa bir bütünlük yoktur. Örneğin. "pseudonorm", "quasinorm", "pseudu-quasinorm", "quasi-pseudonorm", "F-semonorm" gibi isimlendirmeler temel kaynaklarda bazen aynı anlamda kullanılmakta olduğu gibi, farklı anlamlarda da kullanıldığı olabilmekte. Okur bunların farkında olmalıdır.

Kitapta "uzay" kelimesi sıklıkla yer alacak. Her uzayın bir ismi de olacaktır: Metrik uzay, topolojik uzay, vektör uzay gibi. Ancak, kısalık açısından, bir karmaşa sözkonusu değilse ya da ne tür uzay olduğu zaten anlaşılıyorsa uzayın ön ismi kullanılmayabilir. Yani, "vektör uzay" yerine kısalık açısında "uzay" kelimesi kullanılabilir.

Fonksiyonel analizle ilgili Türkçe yazılmış kitaplar oldukça azdır. Yazılan kitaplardan biri Tosun Terzioğlu'nun 2008 yılında Matematik Vakfı tarafından basılan *Fonksiyonel Analiz Yöntemleri* adlı kitabıdır. Bu kitabı okumanın fonksiyonel analizin ne olduğunun tanımlanmasına yetmeyeceği görüşümü bu konuyu çok iyi bilen bir arkadaşımla paylaşmam üzerine, kendisinden zaten beklediğim, "ben hala tanımlayamam" cevabını almıştım. Bu kitap da fonksiyonel analizi anlamaya ve özelikle "tanımlamaya" yetmeyecektir.

Kitabın seviyesi ve kime hitap ettiği konusu göreceli olup, okurun takdirine bırakılmıştır. Kitabın seviyesi de seviyesiz olmuş olabilir.

??.??.????. BOLU