

4.1 “Küme” Nedir ve Nasıl Olmalı Tartışması

Küme havramı olmayan bir şeyin olmayan bir şeye ayar verme oyunudur.

Küme,

- i. Bazı şeylerin bir topluluğudur,
- ii. “İyi tanımlı” bazı şeylerin topluluğudur,
- iii. Elemanları kümeler olan “iyi tanımlı” bir topluluktur¹,

biçiminde olan şeyler olarak ifade etmek kümenin ne olduğunu tanımlamaya yetmiyor. Kümeden beklenen özelliklerin neler olduğunun listesinin de verilmesi kümeyi tanımlamaya yetmiyor. Ama bunlar, kümenin ne olması gerektiği konusunda ipuçları veriyor. Diğer taraftan “matematik yapmak için kullanılan objelerin “tanımlı” olması gerekir mi?” sorusu, en etkili gücümüzden bir olabilir.

Temel sorulardan biri, neden “küme” diye birşeyin tanımlanmasına ihtiyaç duyuluyor? Kitabın ilk taslağında küme tanımı şöyle verilmişti:

Tanım. Bir formül içinde yer alan her değişkene bir **küme** denir.

Bu tanıma göre

$$x \in y$$

formülünde yer alan değişkenler x ve y olduğundan, x ve y ’ler birer kümedir, sonucu çıkar. Aslında her değişkenin bir küme olduğu, bu Tanım yerine “Bir formül içinde yer alan her nesne bir **kümedir**” olsaydı da her değişken bir küme olmuş olurdu. Ayrıca, taa başta neden “değişken” yerine küme denmiyor, sorusu da akla gelebilecek ilk sorulardan biri olacaktır.

Kitap taslağının ilk versiyonuna değerlendirme yapan hakemlerden birinin bu tanıma ilişkin yaptığı eleştiri şöyleydi: “Tanım 3.6’da temel bir sıkıntı var. Yazar, bir kümeyi bir formülde yer alan her nesne olarak tanımlıyor. Bu semantik-biçim (semantic-syntax²) ayrımını tamamen göz ardı eden yanlış bir tanımlama. Bir formülde nesnelere yer almaz, değişkenler³ yer alır. İçerisinde

¹Burada geçen birşeyin “iyi tanımlı” olması onun kontrol edilebilir biçimde tanımlanıyor, olması olarak değerlendirilebilir. Ya da bir şeyin “evcilleştirilmiş” durumu olarak da algılanabilir. Cantor, iyi tanımlı olmayı, herkes tarafından aynı şekilde anlaşılacak şekilde olarak tanımlanmakta.

²Anlambilim olarak da adlandırılan semantik, anlamları inceleyen bir çalışma alanıdır. Syntax, sembollerin dizilim kurallarını çalışılan bir çalışma alanıdır.

³İlgili bölümde nesne ve değişkenlerin aynı anlamda kullanıldığı ifade edilmişti.

çalışılan aksiyomatik sisteme bir anlam verileceği zaten bu değişkenlerin üzerinde değiştiği (quantify) bir objeler evreni olduğu varsayılır. Bir küme, objeler evreninde yer alan bir nesnedir; bir anlamda tanımsızdır⁴. Yazarın bu tanımı, standartlaşmış küme kuramı kitaplarındaki tanımlar ve yaklaşımlarla örtüşmediğinden... sıkıntılıdır.”

Diğer taraftan iki kümenin eşit olması,

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x = y)$$

formülü üzerinden tanımlanır ve bu formül günlük konuşma dilinde “Verilen x ve y kümelerinin birbirlerine eşit olması için gerek ve yeter koşul, birine ait her elemanın diğerine de ait olmasıdır” olarak okunur. Dolayısıyla, bu formülde yer alan x ve y değişkenleri birer “küme” olarak adlandırılmış olmaktadır, değil mi? Benzer biçimde,

$$\exists x \forall y (\neg(y \in x))$$

formülünde geçen

x 'e bir boşküme

denir ve her boşküme bir kümedir, olarak ifade edilir. Böylece bu formülde yer alan x değişkeni de bir “küme”dir. Bir başka örnek olarak şunu verelim.

Teorem Bir önermesel matematik yapıda her değişken bir kümedir.

Kanıt: Daha önce de ifade edildiği gibi (edilmediğinin farkındayız)

$$\forall x \exists y (\forall z (z \in y \leftrightarrow z = x))$$

formülünde y değişkeni, x elemanlı bir kümeyi temsil edeceğinden ve bir kümenin her elemanı bir küme olduğundan (neden?), verilen her x değişkeni bir kümedir.

Yazar olarak yukarıdaki gerekçelerle bir formülde geçen değişkenleri küme olarak tanımlama eğilimi gösterdiğimi ifade etmek isterim. Eleştirmenin “Bir küme, objeler evreninde yer alan nesnedir” açıklamasında geçen “obje”, “evren” ve “nesne” gibi kelimeler yazarın zihninde net değil. Allaha “testere” geçmiyor⁵.

Küme, eleştirmenin de ifade ettiği gibi, “objeler evreninde yer alan bir nesnedir; bir anlamda tanımsızdır.” Bu, küme hakkında hiçbir hata riski içermeyen

⁴“Tanımsız”lık tanımlanabildiğinde sanırım bu yönlü bir tartışma büyük oranda ortadan kalkacak.

⁵Felsefi anlamda, nesne öznenin dışında kalan, dış dünyanın bir parçası olarak bilincin karşısında duran her konu, her şey, olarak tanımlanıyor.

bir ifadedir biraz da kaçamaktır. Diğer taraftan belirli bir hata riskiyle, küme, bir formüde yer alan “değişken gibi birşey” olarak da ifade edilebilir.

Alıştırmalar

- 4.1. “obje” ve “evren” ne demektir?
- 4.2. Yukarıda verilen “Teorem”in ifadesinin ve kanıtının neresi hatalı? Yanıt, “küme”nin ne olduğu bilinmeden yanıt verilemez, denilebilir mi?