SIFIR DERECELİ MANTIK: DİZİLİM

(Metin Çulhaoğlu'na ithaf olunur[1]

- Ayşe çalışkandır.
- Ayşe çalışkansa Ahmet çalışkandır.

verilerinden,

- Ahmet çalışkandır,

çıkarımını yapan mantık, insanlığı 3000 yıldır bu çıkarımın etkisi ve döngüsü altında bırakmıştır. Bu, insanlık için belki de gelmiş geçmiş en büyük bir başarasızlıktır. Öyle ki, bu durum, "insan, canlıların en aptal olanımı dır?" sorusunu sordurtabilecek niteliktedir.

Diğer taraftan, insanlığın en büyük başarılarından biri, "tanımsız" bir şeyi tanımlama başarısı gösterip, bu "şey" üzerine matematiği inşa edebilmiş olmasıdır. Bu, "insan, canlıların en zeki olanı mıdır?" sorusunu anlamlı kılacak düzeydedir. Bu, fiziksel boyuttan zihinsel boyuta geçiş değil, zihinsel boyuttan fiziksel boyuta geşiştir.

Ama insanlık kendini "aptal" ya da "zeki" sınırlarına hapsetmediği sürece hiçbir sorun yok, olgunluk postunda en aptal olmak ya da en zeki olmak mantıksal açıdan problem oluşturmaz.

Yazar olarak edindiğim tecrübe sonrası oluşan gözlemlerim matematikle uğraşan birçok insanın kullandığı birçok kavramı formel olarak tanımlamadan matematik yapabildiğidir. Bu, bir yönüyle pratiksel bir gereklilik olmasının yanında bir yönüyle de giderilebilecek ve giderilmesi gereken bir kambur ve gereksiz bir ağırlıktır. Örneğin,

[1]Yakın zamanda kaybettiğimiz Metin Çulhaoğlu Türkiye sol hareketinin önemli düşünce emekçilerinden biriydi. Yazar için, Metin Çulhaoğlu aynı zamanda bir mizah ustasıydı, bir örnek: Zamandaşlık olsaydı, dünyanın tek cümlede en çok bilgi veren haber girişi herhalde şöyle bir şey olurdu: Ertuğrul Özkök, eşinin adına göndermeyle "Tansu'ya mektuplar" başlığında newsletter olarak yayınladığı yazısında muhaliflere yakın Londra merkezli Suriye İnsan Hakları Gözlemevindeki bir habere dayanarak 'Bahoz Erdal' kod adlı ve Suriye uyruklu Fehman Hüseyin'in son durumuna açıklık getirdi.

Ayrıca Çulhaoğlu 23 Ağustos 2020 yılında "yetmez ama evetçilerle uğraşma ağırlığı"nın formülünü de vermişti: Şu yetmez ama evetçilerin "linç edilmesi" konusu gündemde ya, bu linç edici kesimde yer alıp almadığımı merak ettim. Yaptığım küçük bir araştırma, yetmez ama evetçi linçine katılan biri olmadığımı kesin kanıtlarıyla ortaya koyuyor. Malum referandumdan bu yana 800 küsur yazı yazmışım. Bu yazıların toplam kelime sayısı 527.276. "Yetmez ama evet" ibaresi (3 kelime) bu yazılarda 28 kere geçiyor, 28'i 3'le çarparsak 84 sayısını elde ediyoruz. $84/527.276 = 0.00015$ (yetmez ama evetçilerle uğraşma ağırlığı). Bu arada hesaplama yönteminde bir yanlışlık yok değil mi?

matematikte teorem ve kanıt gibi birçok temel kavramların belirli bir disiplin içerisinde tanımları içselleştirilmeden ya da bilinmeden bu kavramlar üzerinden ifadelerin kurulması, kişi için rahatsız edici bir durum olabilir. Bunun yanında, günlük yaşamda,

$$2+2=4$$

olduğunu da zırt pırt tartışmaya açmanın gerekli olmadığının da farkında olunulmalı. Gerçekten de bu ifadenin doğruluğu tartışmaya açıldığında

$$2913 + 184 = 3097$$

tane teoremin kullanılması gerektiği ifade ediliyor ki, bu, şarap ve aşkın olduğu bir dünyada korkunç birşey!

Bu yazı, bu bakış açısıyla matematiğin üzerine inşa edildiği mantık kavramının ne olduğunu belirli bir denge içerisinde kısaca ifade etme (zaten konuyu derinlemesine de bilmiyorum) ya da tartırşma amaçlıdır.

Yazının anahtar kelimesi "önerme"dir. Önerme, bir "anlam"ı olan belirli kurallarla dizilmiş bir sözcük olarak tarif edilebilir. Burada geçen temel "anlam"lardan birinin **doğru-yanlış** ikilisi olduğunu şimdiden söyleyelim. Bu ikilide geçen "doğru" ve "yanlış" kavramları, varlıklarını ve yaratıcılılıklarını birbirlerinin "zıt"ları olması üzerinden inşa ederler. Bu kavramların kendi başlarına bir anlamları olmayacak olsa da, ancak bir objeye bir sıfat olduklarında o obje hakkında tartışma başlatabilecek araç olacaklardır. Bu anlamda önermeleri değerli yapan şey, değerleri üzerinden tartışılabilir olmalarıdır.

"Seçkin"ler insanlarla değil, olaylarla ilgilenirmiş. Günümüzde daha seçkinler olayları da aşarak sembollerle ilgilenir oldular, yani p, q ve r ve benzeri sembollerle ilgilenmekteler. Bu anlamda seçkin insan,

Hasan'ın babası iyi bir adam olsaydı oğlu Hasan'a bir ev alırdı

biçiminde "dedikodu" içeren bir ifadeyi

$$p \to q$$

formatına çevirebilen bir sembol oyuncusudur. Bu noktada p ve q'lara sıfatlar koymak gerekir, "q iyi biridir" gibi. Seçkin olmanın başka yükümlükleri de var: iyi ve kötüyü sembollerle ifade etmek zorundadırlar. Başka türlü denklem kurmaları ve onu çözmeleri zor olacaktır.

Çok daha seçkinlerse sembolleri objelerin temsilcileri olarak kullanırlar. Sanırım henüz bu tür seçkinciliğin bir ötesi henüz keşfedilmedi.

Günümüzün matematiği bir semboller hareketliliğidir. Bu hareketliliğin bir gerisinde kuralları mantık ve onun bir parçası olan Sıfır Dereceli Mantık (Önermesel Mantık, Önermesel Kalkulüs olarak da bilinir[2].) olarak bilinen kavramca belirlenen bir yapı vardır. Mantık ise felsefenin "dırdır"larından arındırılmış ve kendini daha farklı bir biçimde ifade eden bir bölgesidir.

Bir şey fiziksel olacağı gibi sadece ve sadece zihinde de olabilir. Başka türlü de olamaz. Yani bir şey, fiziksel şey ve zihinsel şey olarak ikiye ayrılabilir. Bunlar, her ne kadar birbirlerinden bağmsız olsalar da etle kemik gibidirler; birbirleriyle tuhaf bir ilişkileri vardır, biri olmadan diğeri olmuyor. Bu iki şey arasındaki farklılığı anlamak için ortaya çıkan kavrama felsefe deniyor ya da denilebilir. Yani felsefe, şeyler arasındaki diyalog olarak tanımlanabilir. Biraz daha detaylandıralım: Felsefe şeyler ile o şeyleri temsil eden şeyler arasındaki ilişkiyi ölçmeye çalışan bir şeydir (Bir an için obje ve şey aynı şeyler demek geliyor.) Kimbilir, felsefe bir yönüyle bir tavuk-yumurta tartışmasıdır. Bu durumda şöyle bir soru tetiklenecektir: *Felsefeyi tavuk-yumurta ikilisi üzerinden anlama çerçevesinde horoz-yumurta ikilisi neye karşılık gelir?*

Dikkat edilirse bir yukarı paragrafta kullanılan-kısmen gizli-anahtar kelimelerden biri "şey"dir. 1552-1599 yılları arasında yaşamış olan İngiliz şair Edmund Spenser "şey"i, bir şeyi gösteren başka birşey olarak tanımlıyor. Daha doğrusu, bir başkası üzerinden anlamlaştırıyor. Bu yaklaşıma göre, bir "şey", büyük bir olasılıkla bir şeye bağlı ve bu anlamda bağımsız değil. Bir başka anahtar kelime ise "ölçme"dir. En ilkel ölçme yöntemi iyi-kötü, doğru-yanlış gibi değer ikilileri üzerinden ifade edilebilir.

Yazıda yer alan esas anahtar kelime "önerme"dir. Her önermenin sözcük olarak dizilimi ve anlamı olacaktır[3]. Bu yazının kapsamı önermelerin sözcük dizimi konusunda olacak. Bunu takip edecek bir sonraki yazının konusunun, önermelerin anlamı üzerine olması planlanmaktadır.

Bu yazıda "teorem" ve "kanıt" kavramları hem kavramsal olarak tanımlanmış hem de her matematikçinin kullandığı anlamda ifade edilmiştir. Okurların bunları ayırt edebilecek deneyimde olduğu varsayılmıştır.

Bu yazının içeriğiyle ilgili Türkçe olarak yazılmış temel kitap [6]'dır.

[2]İnglizce: zeroth-order logic, Propositional Calculus, Statement Logic, Sentential Calculus, Sentential Calculus olarak ifade edilir.

[3]İngilizcede sembollerin dizilim kurallarıyla ilgilenen alana "syntax" ve onların "anlam"ıyla ilgilenilen kavrama "semantix" denilmektedir.

1. Sembol

Yazıda eşanlam olarak "sembol" yerine "simge" de kullanılmıştır.

Sıfır Dereceli Mantık sembollerin belirli kurallar dizilimiyle ifade edilen bir yapıdır. Sembol bir görsel olup, onunla ilişkili temel ifadelerden nelerin kastedildiğinin makül bir seviyede okurlarca bilindiği varsayılmıştır. Örneğin,

$$x, y, x$$

görsellerinin herbiri bir sembol olmasına karşın bu sembollerin bir dizilimi olan

$$xyz$$

gerektiğinde tek bir sembol gibi ele alınabileceği gibi gerektiğinde de yapılan açıklamalara bağlı olarak bir semboller dizilimi gibi de değerlendirilebilecektir. "S bir semboller topluluğu" ya da benzer bir ifadenin S'nin belirli bir sembollerden oluşan bir topluluğunu temsil eden bir sembol anlamında olduğu kabul edilmiştir. Bu durumda bir x sembolü, S'ye ait ise $x \in S$ yazılabilecek. Benzer biçimde T'de bir semboller topluluğunu gösteren bir sembol ise $T \subset S$ gösteriminin anlamı, T'ye ait her sembolün aynı zamanda S'ye ait olduğu anlamında olacak. Daha fazlası, iki semboller topluluğunun bileşimi, arakesiti ve küme kavramında tanımlanan benzeri standart gösterimler ve işlemler herhangi bir açıklamaya gerek kalmadan kullanılabilmiştir.

Aslında semboller belirli objelerin temsilcileri olarak kullanılır ve bir obje birden fazla sembolle gösterilebilir. Örneğin x ve y aynı objeyi gösteriyorsa

$$x = y$$

yazılabilir. Bu gösterimde, okurun eşitlik sembolü "="ye küme teoride olduğu gibi derin bir teknik anlam yüklenmediğinin farkında olduğu varsayalılacaktır.

S ve T iki sembol topluluğu olsun. S'nin her sembolünü T'nin sadece ve sadece tekbir sembolüyle eşleştiren şeye bir fonksiyon denir. Bu, $f : S \to T$ ile gösterilebilir. Ayrıca S'nin elemanı s, T'nin elemanı t ile eşleşiyorsa,

$$f(s) = t$$

yazılabilir. Buna benzer farklı gösterimler de kullanılabilir.

Her pozitif n doğal sayısı için

$$\mathbf{n} = \{1, 2, \cdots, n\}$$

kümesinin ne anlama geldiğinin bilindiği varsayılmıştır. Ayrıca, örneğin

$$\mathbf{3} = \{1, 2, 3\}$$

yazılabilecek.

Tanım 1.1. *T bir sembol topluluğu olsun. Bir $n \in \mathbb{N}$ için* $\mathbf{n}$ *kümesinden T'ye tanımlı her fonksiyona bir* T**-sözcük** *denir.*

Bir $f : \mathbf{n} \to T$ sözcüğü,

$$f = f(1)f(2)\cdots f(n)$$

gösterimiyle de ifade edilebilir. Bu durumda n'ye f sözcüğünün **uzunluğu** f'ye n-terimli T-sözcük ve her $i \in \mathbf{n}$ için $f(i)$'ye f sözcüğünün i'inci terimi denir. n-terimli T-sözcüklerin topluluğu

$$sozcuk_n(T)$$

ve T-sözcüklerinin topluluğu

$$sozcuk(T)$$

ile gösterilmiştir. Bu durumda,

$$sozcuk(T) = \bigcup_n sozcuk_n(T)$$

olur.

$f : \mathbf{n} \to S$ ve $g : \mathbf{m} \to T$ iki sözcük olsun. $k = m + n$ olmak üzere,

$$h(\mathbf{k}) = f(\mathbf{n}) \cup g(\mathbf{m})$$

koşulunu sağlayan $h : \mathbf{k} \to S \cup T$ sözcüğüne f ve g'nin **karışım sözcüğü** denir. Ayrıca, $1 \leqslant i < j \leqslant k$ için

$$(h(i) = f(u) \text{ ve } h(j) = f(v)) \text{ ya da } (h(i) = g(u) \text{ ve } h(j) = g(v)) \text{ ise } u < v$$

koşulu sağlanıyorsa h'ye f ve g'nin **sıralı karışımı** denir.

Her ne kadar bir sözcüğün tanım kümesi $\mathbf{n}$ biçiminde de olsa, bu tanım bölgesi sonlu bir küme olarak da alınabilir.

Okurun bir semboller topluluğunun sonlu, sonsuz ya da sayılabilir sonsuz olduğunun ne anlama geldiğini bildiği varsayılmıştır.

2. Alfabe

Verilen bir semboller topluluğu üzerinde anlamlı bir "hareketlilik" inşa edebilmek için dış müdahelelere gerek duyulacaktır. Bunun için de bir dile, ve bu dilin inşası için alfabeye ihtiyaç vardır.

Bir semboller topluluğunun elemanlarını özelliklerine göre bazı sıfatlarla damgalamak anlamlı bir girişim olabilir. Her sembole aynı sıfatı vermek onlara bir özellik katmayacaktır. Bunun yanında, sıfatlar ilk elden bir diğerinin "zıtları" olan en az farklı iki sıfattan oluşabilir. Felsefi tartışmaların bazı temel ögelerinin **doğru-yanlış** olduğu dikkate alındığında, amaçlanan zıtları ilk elden bu kavramlar üzerinden ifade etmek yerinde olabilir. Diğer taraftan, doğru ve yanlış günlük yaşamda görecelilik içerdiğinden, bunun üzerinden ortaya çıkabilecek yanlış anlamaları en aza indirgemek için bu sıfatları belirli semboller ile göstermek de anlamlı olacaktır. Bu ve benzeri kaygılarla bir sembolün zıttını tanım olarak verelim.

Tanım 2.1. $\neg$ *sembolüne* **değili** *denir*[4].

Değili, kendi başına bir anlam ifade etmese de bunun üzerinden bir sembolün değili olarak tanımlanabilecek. Örneğin T'de verilen bir p sembolünün "zıttı"

$$(\neg p)$$

biçiminde inşa edilmiştir. Elbette bu inşa plansız ve programsız bir biçimde yapılmadı, diyalektik kavramına uygunluk içerisinde bir tartışma ortamı yaratabilecek biçiminde bir amaç tasarlandı.

T'ye değili sembolüyle müdahale edilerek geliştirilebilecek tartışma"evet ama yetmez" boyutundadır. Başka müdahalelere de ihtiyaç vardır. Olası bir başka müdahale, T'nin sembolleri arasında bir bağlantı kurma amaçlı olacaktır. Bunun için de bir başka sembole ihtiyaç olacak.

Aşağıda verilen sembolün genel adı, ok işaretidir. Ama temel önermesel yapıda daha özel bir isim verilir.

Tanım 2.2. $\rightarrow$ *semboline* **koşul eklemi** *denir*[5].

p ve q, T'de iki sembol olduğunda $\rightarrow$ koşulluk eklemi

$$(p \rightarrow q)$$

biçimde yerini alacak ve anlamlaştırılacaktır.

Dikkat edilirse T'de verilen p ve q sembolleri için

$$(\neg p) \text{ ve } (p \rightarrow q)$$

semboller dizilimi tanımlanmaya çalışıldı. Burada geçen "(" ve ")" sembollerini de tanım olarak verelim.

Tanım 2.3. *"(" sembolüne* **açma parantezi** *ve ")" sembolüne* **kapama parantezi** *denir.*

[4]Değili, 1897'de Peano tarafından $\sim$ sembolüyle ve "p'nin değili," 1908'de Russell tarafında $\sim p$ sembolüyle gösterildi. $\neg$ sembolü Arend Heyting tarafından 1930'de kullanılmaya başlandı ve standartlaştı.

[5]Bu sembol mantıkta ilk kez 1922'de David Hilbert tarfından kullanılmıştır.

T, bir semboller topluluğu olmak üzere, $\mathcal{L}(T)$, p'ler T topluluğundaki semboller topluluğunu göstermek üzere,

$$(, \neg, \rightarrow, p,)$$

semboller topluluğunu, yani,

$$\mathcal{L}(T) = T \cup \{\neg, \rightarrow\} \cup \{(,)\}$$

olarak gösterilmiştir.

Tanım 2.4. *$\mathcal{L}(T)$'ye bir* **sıfır dereceli mantıksal alfabe** *denir.*

Çok farklı alfabelerden bahsedilmeyeceğinden, sıfır dereceleli mantıksal alfabeye kısaca alfabe denilebilir. $\mathcal{L}(T)$'nin, T'ye bağlı olduğuna dikkat edelim. Virgül sembolü sayılmayacak olursa $\mathcal{L}(T)$, 5 sembolden oluşmakta gibi gözükse de değildir, çünkü T'nin tek bir p sembolünden oluşması gerekmez. Genellikle T'de istenilen çoklukta sembol olması beklenir ve bu beklenti sayılabilir sonsuz sembolden oluştuğu varsayımıyla sınırlanır. Bu durumda T'nin sembollerinin sadece ve sadece

$$p_1, p_2, \cdots$$

sembollerinden oluştuğu kabul edilir. Ve bu durumda da $\mathcal{L}(T)$, "," sembolünü yok sayarsak,

$$(, \neg, \rightarrow, p_1, p_2, \cdots,)$$

sembollerden oluşan bir sembol topluluğu olacaktır. Ayrıca, $\mathcal{L}(T)$ gösteriminde T'ye ait en az bir sembolün olduğu varsayılacak.

3. Önerme

Öncelikle not edelim: Bir önerme sembollerle temsil edilen zihinsel bir objedir. Bir önerme farklı sembollerle gösterilebilir. Bunun yanında "p bir önerme olsun" denildiğinde kastedilen p'nin bir önermeyi temsil ettiği anlamında olacaktır.

Değili ve koşul eklemini kullanarak, semboller topluluğu "önerme" adı altında genişletilmiştir.

Tanım 3.1. *$\mathcal{L}(T)$ alfabesinde T'nin her sembolüne bir* **temel önerme** *denir*[6].

Temel önermeler, başlangıç önermeler gibi değerlendirilerek bir önerme aşağıdaki gibi döngüsel olarak tanımlanır.

[6]Bu ifadede bir hata yapılıyor: Bir önerme gösterilebilir bir obje değildir, ancak bazı sembollerle temsil ettirilebilir. "p bir önerme olsun" derken denilmek istenen "p, bir örmeyi temsil etsin" anlamındadır, yani "p bir önerme vekili olsun"dur. Tıpkı $E = mc^2$ formülünde c'nin ışık hızı olmayıp, ışık hızını temsil etmesi gibi.

Tanım 3.2. $\mathcal{L}(T)$ *alfabesinde bir* **önerme** *aşağıdaki gibi "tanım"lanır*[7].

i. *Her temel önerme bir önermedir.*
ii. p *bir önerme ise* $(\neg p)$ *bir önermedir.*
iii. p *ve* q *iki önerme ise* $(p \to q)$ *bir önermedir.*
iv. *Bir önerme yalnız ve yanlız* (i), (ii) *ya da* (iii)*'deki gibidir.*

Tanımlamada yer alan açma parantezi "(" ve kapama parantezi ")" önermelerin ifade biçimlerinde yanlış anlaşılmayı engelleyen semboller olarak kullanıldığının okur farkında olmalıdır. Eğer bu parantezler kullanılmasaydı, p, q ve r önermeleri için,

$$(p \to (q \to r)) \text{ ve } ((p \to q) \to r)$$

önermeleri aynı önermelermiş gibi yanlış değerlendirmeler olabilirdi. Bunun yanında, önermelerin gösterimlerinde bir yanlış anlaşılma durumu söz konusu olmayacaksa bazı kısaltmalar yapılabilir. Örnegin, verilen p ve q önermeleri için,

- $(\neg p) = \neg p$,
- $(p \to q) = p \to q$,
- $((\neg p) \to q) = \neg p \to q$

yazılabilir.

$\mathcal{L}(T)$ alfabesindeki bütün önermelerin topluluğu

$$onerme(\mathcal{L}(T))$$ [8]

ile gösterilsin. Bu,

$$onerme(\mathcal{L}(T)) = T \cup \{(\neg p) : p \in onerme(\mathcal{L}(T))\} \cup \{(p \to q) : p, q \in onerme(\mathcal{L}(T))\}$$

biçiminde ifade edilebilir. Ayrıca,

$$T \subset onerme(\mathcal{L}(T))$$

olduğuna vurgu yapalım. Bunun yanında,

$$onerme(\mathcal{L}(T)) \subset sozcuk(\mathcal{L}(T))$$

olmasa da buna benzer anlamda bir şey olabileceğini ifade edelim.

Teorem 3.3. $onerme(\mathcal{L}(T))$*'nin sembol sayısı sonsuzdur.*

Değili,

$$onerme(\mathcal{L}(T)) \to onerme(\mathcal{L}(T)),\ \neg(p) = (\neg p)$$

ve koşul eklemi

[7]Önerme kavramı farklı biçimlerde ifade edilebilir. Bununla ilgili bir kaynak [5]'dir.

[8]Bu gösterim yerine $onerme(\mathcal{L}(T))$ hatta $onerme(T)$ yazılabilirdi, ama vurgu açısından $onerme(\mathcal{L}(T))$ gösterimi tercih edildi.

$$onerme(\mathcal{L}(T)) \times onerme(\mathcal{L}(T)) \to (\mathcal{L}(T)), \to (p, q) = (p \to q)$$

kurallarıyla tanımlanan fonksiyonlar olarak görülebilir.

$\mathcal{L}(T)$ alfabesinde verilen $F \subset onerme(\mathcal{L}(T))$ için

$$X(F) = \{(,), \neg, \to\} \cup F$$

olarak tanımlanacak ve gösterilecektir. Aşağıdaki tanım ileride kullanışlı olacaktır.

Tanım 3.4. *$F \subset onerme(\mathcal{L}(T))$ verilsin.*

$$< F >= onerme(\mathcal{L}(T)) \cap sozcuk(X(F))$$

olarak tanımlanır ve gösterilir.

Dolayısıyla, $< F >$'ye ait her önermenin açılımında bulunan önermeler sadece ve sadece F'ye ait olacaktır. Yani, $f \in< F >$ ve $f(i) \in onerme(\mathcal{L}(T))$ ise $f(i) \in F$ olmak zorundadır.

Aşağıdaki teoremin kanıtı okura bırakıldı.

Teorem 3.5. *$\mathcal{L}(T)$ alfabesinde $onerme(\mathcal{L}(T))$'nin sonlu alt topluluklarının topluluğu $\mathcal{F}$ ile gösterilsin.*

$$onerme(\mathcal{L}(T)) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} < F >$$

olur.

Bunun yanında, bir önermenin uzunluk kavramı tanımlandıktan sonra

$$onerme(\mathcal{L}(T)) =< T >$$

olduğu gösterilecek.

4. Altönerme

Bir önermenin altönermesi aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 4.1. *$\mathcal{L}(T)$ alfabesinde,*

i. *Her önerme kendi kendisinin bir altönermesidir.*
ii. *p önermesi $(\neg p)$ önermesinin bir altönermesidir.*
iii. *p ve q önermeleri $(p \to q)$ önermesinin bir altönermesidir.*
iv. *Bir önermenin altönermesinin altönermesi bir altönermedir.*

Bu tanımla bir altönerme şöyle de okunabilir:

$$p = s_1 s_1 \cdots s_n \in sozcuk(\mathcal{L}(T))$$

önermesi verilsin. $1 \leqslant k \leqslant m \leqslant n$ olmak üzere,

$$q = s_k s_{k+1} \cdots s_m$$

bir önerme ise, q, p'nin bir altönermesidir.

Tanım 3.4 ve Teorem 3.5 dikkate alınarak aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 4.2. *$\mathcal{L}(T)$ alfabesinde $F \subset onerme(\mathcal{L}(T))$ olmak üzere, $f : \mathbf{n} \to X(F)$, $f \in < F >$ önermesi verilsin. $f(\mathbf{n})$'e ait her önermeye f'nin* **asıl altönermesi** *denir.*

Her önerme $p \in onerme(\mathcal{L}(T))$ için

$$p = s_1 s_2 \cdots s_n$$

olacak biçimde $\{(,), \neg, \to\}$ semboller topluluğuna ait olmayan her s_i bir önerme olup, bu önermeler p önermesinin bir asıl altönermesidir.

Bir önermenin hiçbir asıl altönermesi bir temel önerme olmayabilir. Bunun yanında her önermenin her asıl altönermesinin sadece ve sadece temel önermelerden oluşan bir önermeye "denk" (tanımlanacak) olduğu kanıtlanabilir.

5. Önermenin Uzunluğu

S, bir semboller topluluğu olmak üzere $n \in \mathbb{N}$ için bir $f : \mathbf{n} \to S$ sözcüğünün uzunlugu n olarak tanımlanmıştı. Benzer bir tanımlama önerme içinde verilebilir. Ancak, önermenin tanımındaki döngü nedeniyle bir önermenin uzunluğu da döngüsel olarak da tanımlanabilir. Bir önermenin uzunluğunun tanımlanması sonrası, önermelerle ilgili teoremler ve kanıtlarında tümevarım yönteminin uygulanmasının yolu açılacaktır.

Doğal sayılar üzerinde tümevarım şu biçimde ifade edilir.

Teorem 5.1. *f, $\mathbb{N}$'den $\{0, 1\}$ kümesine bir fonksiyon olsun. $f = 1$ (yani her $n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = 1$) olması için gerek ve yeter koşul, $f(1) = 1$ ve her $m \in \mathbb{N}$ için $f(m) = 1$ olduğunda $f(m + 1) = 1$ olmasıdır*[9].

Bu teoremde $f(n) = 1$ olması n'inci basamaktaki belirli bir olayın gerçekleşmesi olarak değerlendirilir.

Aşağıdaki teoremin kanıtı okura bırakıldı.

Teorem 5.2. *$\mathcal{L}(T)$ alfabesinde aşağıdaki koşulları sağlayan bir $|.| : onerme(V) \to \mathbb{N}$ fonksiyonu vardır: p bir temel önerme olmak üzere, p,q ve r önermeleri için,*

$$|.|(p) = |p|$$

gösterimi kullanılmak üzere,

[9] Kanıtı, doğal sayıların iyi sıralı özelliğine, yani doğal sayıların boş olmayan her altkümesinin en küçük elemanı vardır, denkliği üzerinden verilir.

- $|p| = 1$.
- $|(\neg q)| = 3 + |q|$.
- $|(q \to r)| = 3 + |q| + |r|$.

Teoremde geçen u'ya $onerme(\mathcal{L}(T))$'nin uzunluk fonksiyonu ve her önerme $p \in onerme(\mathcal{L}(T))$ için $u(p)$ sayısına p önermesinin bir uzunluğu denir. Bu teoremin bir uygulaması olarak aşağıdaki teorem kanıtlanabilir.

Teorem 5.3. $\mathcal{L}(T)$ *alfabesinde*

$$onerme(\mathcal{L}(T)) =< T >$$

olur[10].

Kanıt. Tanım gereği

$$< T >\subset onerme(\mathcal{L}(T)).$$

$$A = \{n \in \mathbb{N} : p \in onerme(\mathcal{L}(T)), |p| \leqslant n \Rightarrow p \in< T >\}$$

olarak tanımlansın.

$n = 1$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $p \in onerme(\mathcal{L}(T))$ ise p bir temel önerme, yani $p \in T$ ve dolayısıyla $p \in< T >$ olur. Sonuç olarak $1 \in A$.

$n \in A$ olduğunu varsayalım.

$$p \in onerme(\mathcal{L}(T)) \text{ ve } |p| \leqslant n + 1$$

olsun. $p \leqslant n$ ise $n \in A$ olduğundan, varsayım gereği $p \in< T >$ olur. $|p| = n + 1$ olduğunda, p bir temel önerme olamaz, dolayısıyla, iki durum söz konusudur.

Birinci durum: p, bir q önermesi için $(\neg q)$ biçiminde olacaktır. Bu durumda $|q| \leqslant n$ olur ve varsayım gereği $q \in< T >$ olur. Ve dolayısıyla, $p \in< T >$ olur.

İkinci durum: p, bazı q ve r önermeleri için $(q \to r)$ biçiminde olacaktır. Bu durumda, $|q|, |r| \leqslant n$ olacağından, varsayım gereği $q, r \in< T >$ olacaktır. Dolayısıyla, $p \in< T >$ olur.

Böylece $n + 1 \in A$ olur. Tümevarım gereği $A = \mathbb{N}$ olur. Her önermenin doğal sayı olan bir uzunluğu olduğundan teorem kanıtlanmış olur.

6. Aksiyom

Bir yapının bir aksiyomu, o yapının bir kurucu ögesidir. Yapının diğer bütün ögeleri bu yapının aksiyomları üzerine inşa edilir. Örneğin, bir aile yapısının kurucu ögeleri

[10]Bu satırda kullanılan "=" sembolü önermenin farklı sembollerle temsil edilebilir olması anlamındadır.

anne ve babadır ve dolayısıyla onlar o yapının aksiyomlarıdırlar. (Fena bir örnek olmadı.) Fiziksel bir yapının aksiyomlarının fiziksel yasalarla "uyumlu" olması beklenirken, zihinsel bir yapının aksiyomlarının bir yönüyle bir çaresizlik inancı biçiminde olduğu yorumlanabilir.

Aksiyomların bir yapıyı temsil eden temel unsurlar olmasının yanında, birbirlerinden "bağımsız" olması beklenir. Örneğin, $E = \mathbb{R}^2$ vektör uzayı x ekseni ($= \mathbb{R} \times \{0\}$) ve y ekseni ($\{0\} \times \mathbb{R}$) üzerinden tanımlanır, yani E vektör uzayı bu eksenler tarafından üretildiğinden, bu eksenler, bir anlamda, E vektör uzayının aksiyomları olarak yorumlanabilir.

Her ne kadar her yapının bir aksiyom sistemi olduğu ifade edilmiş olsa da bir felsefe yapısının aksiyom sistemini tanımlamak güç olabilir. Buna karşın, mantığın ya da daha spesifik bir altdalı olan önermesel mantığın aksiyomatik yapısı bir önerme olarak ifade edilebilir. Önermesel matığın aksiyomlarının mantıksız olmasını beklemek mantıksızlık olabilir. Son cümle kötü niyetle değil, proveke etmek amacıyla yazılmıştır.

Yukarıda ifade edilen yaklaşıma uygun bir biçimde önermesel mantığın aksiyomları aşağıdaki gibi ifade edilebilirler.

Tanım 6.1. *$\mathcal{L}(T)$ alfabesinde $p, q, r \in onerme(T)$ olmak üzere aşağıdakilerin her birine bir* **aksiyom** *denir.*

- $A_1(p, q) = (p \to (q \to p))$.
- $A_2(p, q, r) = (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$.
- $A_3(\neg, p, q) = (((\neg p) \to (\neg q)) \to (q \to p))$[11].

Bu biçimiyle bir önermesel yapı (daha doğrusu bir altyapı), eksenleri

$$A(p, q),\ A(p, q, r) \text{ ve } A(\neg, p, q)$$

olan üç boyutlu bir yapı gibi hayal edilebilecektir. Aslında bu üç aksiyom, "Meredith aksiyomu" olarak bilinen tek bir aksiyom ile ifade edilebilir. Bir sonraki yazıda bundan bahsedilecek.

Bu aksiyom sisteminin tanımlanmasının arkasında, önermelerin bir sıfatla donatıldığı varsayıldığında p, q ve $p \to q$ önermelerinin sıfatları arasındaki ilişkinin ne olması gerektiği vardır. Aksiyomlar doğrular üstü kabul edilmelidir. Diğer taraftan

[11]Bu üç aksiyomdan oluşan önermesel yapı Jan Lukasiewicz'ye (1878-1956) atfedilir. Bu yapı, sistem P_2 adıyla Alonzo Churc tarafından popüler hale getirilmiştir. Bu aksiyomlar [4]'de tanım olarak verilmiştir.Burada geçen birinci aksiyom [8]'da "the principle of simplification" adıyla yer almış olup, [3]'de ("Proposition 1"in birinci aksiyomu, s.26) yer almıştır. İkinci aksiyom, [3]'ın Proposition 2'de yer almış olup, "Frege aksiyomu" olarak bilinir. Ücüncü aksiyom da Principia Mathematica'da yer almış olup, "the principle of transposition" olarak bilinir.

$$p \text{ doğru ise } p \text{ doğrudur}$$

ifadesi hepdoğrudan daha doğru gibi gözükse de $\mathcal{L}(T)$'de

$$(p \to p)$$

hepdoğru olmasına karşın hiçbir zaman bir aksiyom olamayacaktır. Bu söylemlerle kastedilenin daha iyi anlaşılabilmesi için makalenin bütününe bakmak gerekecektir.

$\mathcal{L}(T)$ alfabesinde aksiyomların topluluğu $aksiyom(\mathcal{L}(T))$ ile gösterilmiştir. Sonsuz tane aksiyom olduğu açık olmalı.

7. Modus Ponens

Önermesel mantıkta modus ponens, bir mantıksal çıkarım kuralıdır. Sözel olarak ifade ettiği şey şudur:

- Ali doğru söylediğinde Mehmet doğru söylüyor,
- Ali doğru söylüyor

ise

- Mehmet doğru söyler.

Bu kuralın doğru olduğu varsayılır. Bu ifadeye kim yanlış diyebilir ki? İşte bu, çıkarım kuralı mantığın dibidir. Bu nedenle bu kural için özel bir başlık açıldı, ama söyleyecek fazla bir şey de yok. Bunu tanım olarak vermeye çalışalım.

Tanım 7.1. $\mathcal{L}(T)$ *dilinde* p *ve* q *iki önerme olmak üzere,*

$$p \textit{ ve } p \to q \textit{ olduğunda } q \textit{ olur}$$

çıkarımına **modus ponens** *denir*[12].

Bu tanım, $\mathcal{L}(T)$ dilinde verilmiş olmadığından birçok okurun beklentisini karşılamayabilir ya da huzursuz edebilir. Buna karşın $\mathcal{L}(T)$ dilini zenginleştirebilecek "ve" eklemi ($\wedge$ ile gösterilir, ve bundan bahsedilecek!) eklenerek, modus ponens kuralı $\mathcal{L}(T)$ dilinde,

$$((p \wedge (p \to q)) \to q)$$

olarak ifade edilebilir ki, o zaman modus ponens bir çıkarım olmaktan öte bir aksiyom gibi birşey olacaktır. Ama olsun, birbirlerini tamamlayabilecek bir durum söz konusudur.

Mantığın dibi olduğu ifade edilen modus ponens bu kadar kısa geçiştirilmemeli, daha iyi anlaşılabilmesi için bu kurala denk başka kurallar olmalı ve vardır da. Bunlardan biri:

[12] Modus ponens kuralı Aristo'ya dayanır. Bu kuralın Aristo'dan 2. yüzyıla kadar olan süreci ile ilgili bir çalışma [1]'dir.

Tanım 7.2. *$\mathcal{L}(T)$ alfabesinde p ve q iki önerme olmak üzere,*

$$q \text{ doğru değil ve } p \to q \text{ olduğunda } p \text{ doğru değildir}$$

çıkarımına **modus tollens** *denir.*

Modus ponens ve modus tolens çırımları birbirlerine "denktir". Bu satırda geçen denklik kavramının ne olduğu bir sonraki yazının konusu olacaktır.

8. Kanıt

$\mathcal{L}(T)$ alfabesinde bir teorem döngülü olarak şöyle tanımlanabilir:

- Her aksiyom bir teoremdir.
- p ve q iki önerme olmak üzere, p ve $(p \to q)$ önermeleri iki teoremse, q önermesi de bir teoremdir.
- q, aksiyom olmayan bir teorem ise $(p \to q)$ önermesini teorem yapan bir p teoremi vardır.

Bunun yanında, teorem tanımı, kanıt terimiyle de tanımlanabilir. Kanıtın tanımını vermeden önce bir ön tanım verelim.

Tanım 8.1. *$f \in sozcuk(onerme(\mathcal{L}(T))$, n-terimli bir sözcük olsun. $1 \leqslant k \leqslant n$ olmak üzere,*

- $f(k) = q$
- $f(i) = p$
- $f(j) = p \to q$

olacak biçimde $1 \leqslant i, k \leqslant n$ ve, p ve q önermeleri varsa $f(k)$'ya f sözcüğünün bir **modus ponens** *önermesi denir.*

Tanım 8.2. *$\mathcal{L}(T)$ alfabesinde her terimi bir aksiyom ya da bir modus-ponens olan $f \in sozcuk(onerme(\mathcal{L}(T)))$ sözcüğüne bir* **kanıt** *denir.*

Kanıtların topluluğu

$$kanıt(\mathcal{L}(T))$$

ile gösterilir. Bu gösterime göre,

$$sozcuk(aksiyom(\mathcal{L}(T))) \subset kanıt(\mathcal{L}(T)) \subset sozcuk(onerme(\mathcal{L}(T)))$$

olur. Bir kanıtın ilk iki terimi her zaman bir aksiyomdur.

Aşağıdaki teoremin kanıtı tümevarım kullanılarak formel biçimde verilebilir.

Teorem 8.3. *$n \in \mathbb{N}$ için $f : \mathbf{n} \to onerme(\mathcal{L}(T))$ bir kanıt olsun. $1 \leqslant k \leqslant n$ olmak üzere, her $1 \leqslant i \leqslant k$ için*

$$g(i) = f(i)$$

kuralıyla tanımlı $f : \mathbf{k} \to onerme(\mathcal{L}(T))$ fonksiyonu, bir kanıttır.

Kanıtların aşağıda verilen anlamda bileşimlerinin bir kanıt olduğu kolaylıkla kanıtlanabilir.

Teorem 8.4. *k bir doğal sayı ve her $1 \leqslant i \leqslant k$ için n_i bir doğal sayı olmak üzere*

$$A_i = \{1, 2, \cdots, n_i\}$$

olsun. Ayrıca, $f_i : \mathbf{n_i} \to onerme(T)$ bir kanıt olsun. Bunun yanında

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

olmak üzere, $f : \mathbf{n} \to onerme(T)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlasın.

- $f(A) = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(A_i)$
- *$f(i), f(j) \in f_k(A_k)$ ve $i < j$ ise $f(i) = f_k(u)$, $f(j) = f_k(v)$ ve $u < v$ olacak biçimde doğal sayılar u, v vardır.*

Bu durumda, f bir kanıttır.

Kanıt kavramı genellenebilir:

Tanım 8.5. *$\mathcal{L}(T)$ alfabesinde $F \subset onerme(\mathcal{L}(T))$ verilsin. Her terimi ya bir aksiyom, ya bir modus ponens ya da F'nin bir elemanı olan $sozcuk(onerme(\mathcal{L}(T)))$'nin elemanına bir F-kanıt denir.*

F-kanıtların topluluğu F-*kanıt*$(\mathcal{L}(T))$ ile gösterilecek olursa

- $\varnothing$-*kanıt*$(\mathcal{L}(T)) =$ *kanıt*$(\mathcal{L}(T))$,
- $onerme(\mathcal{L}(T))$-*kanıt*$(\mathcal{L}(T)) =$ *kanıt*$(\mathcal{L}(T))$
- $sozcuk(F) \subset F$-*kanıt*$(\mathcal{L}(T))$

olur.

9. Teorem

Teorem, kanıt terimiyle aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 9.1. *Bir kanıtın son terimine bir* **teorem** *denir.*

$\mathcal{L}(T)$'de teoremlerin topluluğu

$$teorem(\mathcal{L}(T))$$

ile gösterilir. Aşağıdaki teorem, bir teoremin teorem olduğunun gösterilmesinde oldukca kullanışlıdır.

Teorem 9.2. *n bir doğal sayı olmak üzere, $f : \mathbf{n} \to onerme(\mathcal{L}(T))$ fonksiyonu verilsin. f'nin herbir terimi ya bir aksiyom, ya bir teorem ya da modus ponens önerme olsun. $f(i)$'ler bir teorem olduğunda, $f(i)$ yerine bunun kanıtının yazılmasıyla elde edilen fonksiyon bir kanıttır.*

Bu teoremin bir uygulaması olarak her bir terimi ya bir aksiyom, ya bir teorem ya da bir modus ponens olan her fonksiyon bir kanıt olarak ele alınabilir.

Müjde: Böylece bütün insanlığa yetecek çoklukta teorem vardır. Kanıtı okura bırakıyoruz.

Teorem 9.3. *$teorem(T)$ sonsuzdur.*

Tanım 9.4. *$f \in sozcuk(onerme(T))$, n terimli ise f'ye $f(n)$ teriminin bir* **kanıtı** *denir.*

p bir teoremse, p'nin kanıtlarının topluluğu

$$kanıt(p)$$

ile gösterilecektir. Bir müjde daha:

Teorem 9.5. *Her teoremin sonsuz tane kanıtı vardır.*

Teorem 9.6. *Bir önermenin bir teorem olması için gerek ve yeter koşul bir kanıtın bir terimi olmasıdır.*

Teorem 9.7. *$aksiyom(\mathcal{L}(T)) \subset teorem(\mathcal{L}(T)) \subset onerme(\mathcal{L}(T))$ olur.*

Bir önermenin teorem olması şu biçimde de ifade edilebilir.

Teorem 9.8. *$\mathcal{L}(T)$ alfabesinde verilen bir q önermesinin bir teorem olması için gerek ve yeter koşul, ya bir aksiyom ya da $(p \to q)$ bir teorem olacak biçimde bir p teoreminin olmasıdır.*

Bu teoremin kanıtı önermenin uzunluğu üzerinden tümevarımla verilebilir. Detaylar okura bırakıldı.

Teorem kavramı genellenebilir.

Tanım 9.9. *Bir F-kanıtın her terimine bir F-teorem denir.*

F-teoremlerin topluluğu F-$teorem(\mathcal{L}(T))$ ile gösterilecek olunursa

- $\varnothing$-$teorem(\mathcal{L}(T)) = teorem(\mathcal{L}(T))$,
- $onerme(\mathcal{L}(T))$-$teorem(\mathcal{L}(T)) = onerme(\mathcal{L}(T))$
- $F \subset F$-$onerme(\mathcal{L}(T))$

olur.

Tanım 9.10. *$f \in F$-kanıt$(\mathcal{L}(T))$ ve f'nin son terimi p ise, f'ye p'nin bir* **F-kanıtı** *denir.*

Bu durum,

$$F \vdash p$$

ile gösterilir.

Bir önermenin bir teorem olmasının bir sonraki yazıda tanımlanacak olan hepdoğru kavramına denk olduğu kanıtlanacak. Ancak, bu denklik üzerinden bir teoremin kanıtının kolay bir biçimde verilmesine çok faydası olmayacaktır.

10. Çıkarım Teoremi

Kanıt ve teorem kavramının daha net anlaşılmasını sağlayan teoremlerden biri Çıkarım Teoremi olarak bilinir. Bu teoremin standart biçimini vermeden önce aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 10.1. *$F \subset onerme(\mathcal{L}(T))$ ve $p, q \in onerme(\mathcal{L}(T))$ olsun. Ayrıca $f \in F \cup \{p\}$-kanıt(q) verilsin. f'nin tanım bölgesindeki her $i \in \mathbb{N}$ için $F \vdash p \to f(i)$ olur.*

Kanıt. [13] f'nin n-terimli olduğunu varsayalım. $f(1)$, f'nin modus ponens terimi olmayacağından hareketle aşağıdaki üç durumdan biri söz konusudur. Ayrıca,

$$f(1) \to (p \to f(1))$$

önermesinin bir aksiyom olması kullanılarak, ilgili sonuçlar elde edilir.

i. $f(1)$ bir aksiyom:

$$g(1) = f(1),\ g(2) = f(1) \to (p \to f(1)) \text{ ve } g(3) = (p \to f(1))$$

olarak tanımlanan $g : \{1, 2\} \to onerme(T)$ sözcüğü bir kanıttır ve dolayısıyla $\vdash p \to f(1)$ olur. Ayrıca $F \vdash p \to f(1)$ olur.

[13] Bu kanıtın esas olarak Jacques Herbrand'ın 1930'da basılan *Recherches sur la theorie de la demonstrationOffsite Link* adlı doktora tezinde verildiği düşünülür. Hernrand, 1908-1931 yılları arasında yaşamış ve bir kayak kazasında yaşamını kaybetmiş bir Fransız matematikçidir.

ii. $f(1) \in F$: Bu durumda $F \vdash f(1)$ ve $F \vdash f(1) \to (q \to f(1))$ olacaktır. Buradan da $F \vdash (q \to f(1))$ elde edilir.

iii. $f(1) = p$: Bu durumda, $\vdash (p \to p)$, yani $\vdash (p \to f(1))$ elde edilir.

Böylece $j = 1$ olmak üzere her $1 \leqslant i \leqslant j$ için $F \vdash p \to f(i)$ olduğu gösterilmiş olur.

$$A = \{k : 1 \leqslant k \leqslant n,\ \text{her } 1 \leqslant i \leqslant k \text{ için } F \vdash (p \to f(i))\}$$

olmak üzere $1 \in A$ olur.

$$m = \sup A$$

doğal sayısı tanımlanabilir. $m = n$ olduğu gösterilecek. $m < n$ olduğunu varsayalım. $k = m + 1$ diyelim. Tanım gereği her $i < k$ için $F \vdash f(i)$ olur. $f(k)$ için dört durum sözkonusudur: aksiyom, F'nin elemanı, p'e eşit ya da f'nin bir modus ponens önermesidir. İlk üç durumda $f(1)$ için durum incelemesine benzer biçimde işlemler yapılarak $F \vdash f(k)$ olduğu görülür. $f(k)$'ın f'nin bir modus ponens önermesi olma durumunda

$$f(j) = f(i) \to f(k)$$

olacak biçimde $1 \leqslant i, j < k$ tamsayıları bulunabilir. Varsayım gereği:

i. $F \vdash p \to f(i)$.

ii. $F \vdash p \to f(j)$.

iii. $F \vdash (p \to (f(i) \to f(k)))$

iv. $F \vdash (p \to (f(i) \to f(k))) \to ((p \to f(i)) \to (p \to f(k)))$

(iii) ve (iv)'e modus ponenes uygulanarak,

v. $F \vdash ((p \to f(i)) \to (p \to f(k)))$

elde edilir. (i) ve (v)'e yine modus ponens kuralı uygulanarak,

vi. $F \vdash (p \to f(k)))$

elde edilir. Böylece, $k \in A$ olur. Bu, çelişkidir. O halde, $m = n$ olmalıdır. Kanıt tamamlanır.

Bu teorem kullanılarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 10.2. *(Çıkarım Teoremi) $F \subset onerme(T)$, $p, q \in onerme(T)$ verilsin. $F \cup \{p\} \vdash q$ olması için gerek ve yeter koşul, $F \vdash (p \to q)$ olmasıdır*[14].

[14]Bu teorem İngilizce olarak *Deduction Teorem* olarak bilinir. Bu konuyla ilgili izler [2]'de bulunabilir.

11. Modus Ponens ve Modus Tollens Çıkarımlarının Genel Hali

Tanım gereği, bir kanıtın her teriminin bir teorem ve her teoremin bir kanıtı olmasına karşın, bir teoremin kanıtını (en basitinden, $(p \to p)$ teoreminin bir kanıtını) vermek bile zor olabilir. Bununla ilgili örnekleri burada vermek yazının hacmini artırabileceği için bu yönlü detaylı örnekler verilmemiş olsa da, aşağıdaki teoremin kanıtı yöntem olarak bir fikir verebilecektir. Ayrıca yine vurgulayalım: Bir önermenin teorem olup olmadığı kanıt verilmeden bir sonraki yazıda bahsedilecek olan "önermelerin değeri" üzerinden anlaşılabilir. Ayrıca modus ponens ve modus tollens çıkarımlarının genel hali teorem olarak ifade edilmiştir.

Modus ponens şu biçimde de ifade edilebilir:

Teorem 11.1. *Her p, q önermesi için $p, p \to q \vdash q$ olur.*

Bu teoremin bir uygulaması olarak verilen p, q ve r önermeleri için $p \vdash q$ ve $q \vdash r$ ise $p \vdash r$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu,

$$\vdash (p \to q) \text{ ve } \vdash (q \to r) \text{ ise } \vdash (p \to r)$$

olmasına denktir.

Teorem 11.2. *p, q ve r önermeler ve*

$$F = \{(p \to q), (q \to r)\}$$

olmak üzere,

$$F \vdash (p \to r)$$

olur.

Kanıt. $n = 7$ olmak üzere $f : \mathbf{n} \to onerme(\mathcal{L}(T))$ fonksiyonu

- $f(1) = (p \to q)$ (F'nin elemanı)
- $f(2) = (q \to r)$ (F'nin elemanı)
- $f(3) = ((q \to r) \to (p \to (q \to r)))$ (aksiyom)
- $f(4) = (p \to (q \to r))$ ($f(2)$, $f(3)$ ve modus ponens)
- $f(5) = (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (aksiyom)
- $f(6) = ((p \to q) \to (p \to r))$ ($f(4)$, $f(5)$ ve modus ponens)
- $f(7) = (p \to r)$ ($f(1)$, $f(6)$ ve modus ponens)

kuralıyla tanımlansın. f'nin bir kanıt olduğu açık. İstenilen kanıtlanmış olur.

Bu teorem genellenebilir. Aşağıdaki teoremin kanıtı okura bırakıldı.

Teorem 11.3. *(Syllogism)* $p, q, r \in onerme(mathcal L(T))$ *ve* $F \subset onerme(mathcal L(T))$ *olmak üzere,* $F \vdash (p \to q)$ *ve* $F \vdash (q \to r)$ *ise* $F \vdash (p \to r)$ *olur.*

Yine aşağıdaki çıkarım teoremlerinin kanıtı okura bırakılmıştır.

Teorem 11.4. $F \subset onerme(\mathcal{L}(T))$ *ve* p, q *önermeleri için aşağıdakiler olur.*

- *(Modus ponens)* $F \vdash p$ *ve* $F \vdash (p \to q)$ *ise* $F \vdash q$.
- *(Modus tolens)* $F \vdash (\neq q)$ *ve* $F \vdash (p \to q)$ *ise* $F \vdash (\neg p)$.

References

[1] S. Bobzien *The Development of Modus Ponens in Antiquity: From Aristotle to the 2nd Century AD*, Phronesis, Vol 47, no:4, 2002
[2] C. Franksz, *The deduction theorem before and after Herbrand.* Hist. Philos. Logic 42 (2021), no.2, 129-159.
[3] G. Frege,*Begriffsschrift.* 1879.
[4] A. G. Hamilton,*Logic for Mathematicians.* Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
[5] L. H. Mondonedo, *Review of the Definitions of Propositions and Statement in their Relationship with Mathematics*, Revista Digital de Investigacion En Docencia Universitaria, 2017.
[6] A. Nesin, *Önermeler Mantığı*, Nesin Matematik Köyü, 2009.
[7] B. Subrata, *Propositional Logic.* 2017.
[8] A. N. Whitehean and B. Russell, *Principia Mathematica.* 1910, 1912, 1913.