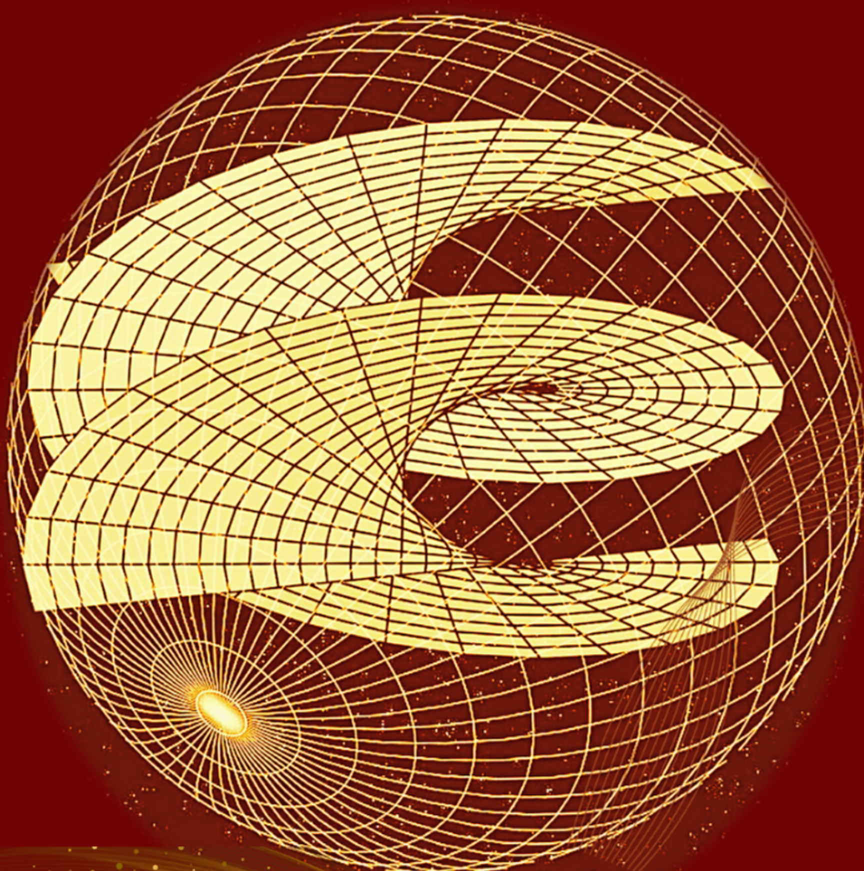
# DİFERENSİYEL GEOMETRİ

VE

MATHEMATICA UYGULAMALARI

PROF. DR. AYSEL TURGUT VANLI



# DİFERENSİYEL GEOMETRİ
# VE
# MATHEMATICA UYGULAMALARI

Prof. Dr. Aysel TURGUT VANLI



ISBN 978-625-00-9044-2

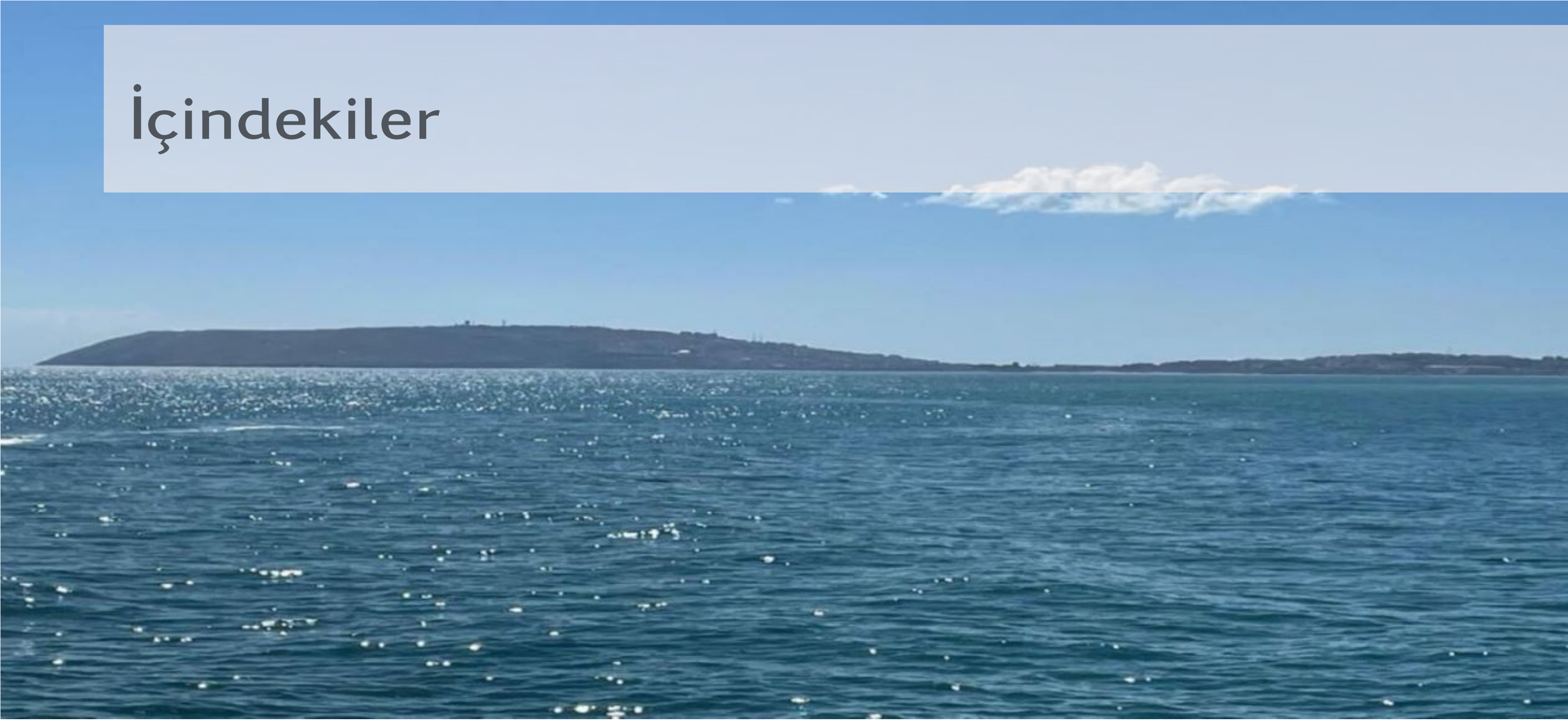
Basım Sayısı: 1. Basım, Ekim 2022



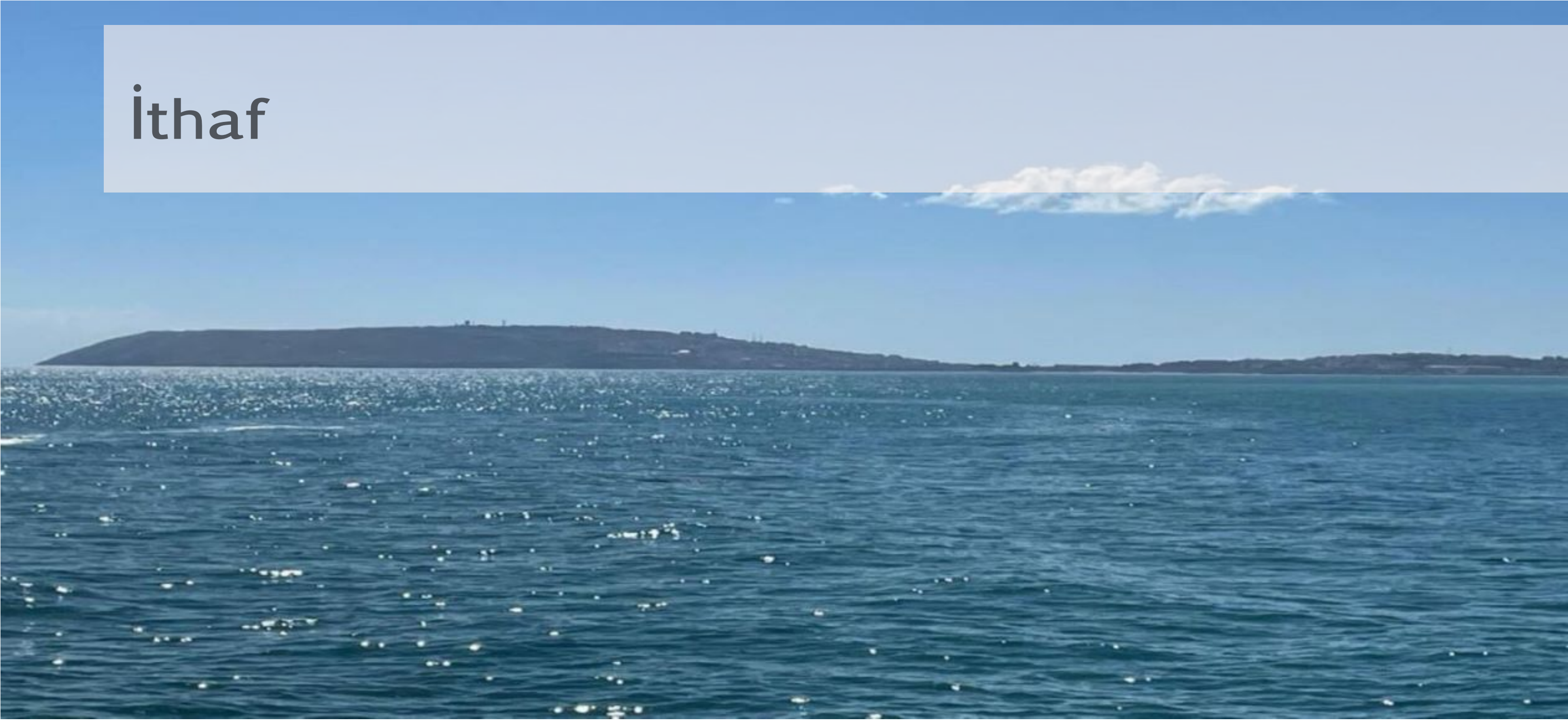
Baskı ve Cilt:
Öz Baran Ofset Matbaacılık San. ve Tic. Ltd. Şti.
Sertifica No: 46549
Saray Mah. Gıdacılar Cad. No.8 06980 Kahramankazan/ANKARA

Kitap Talebi: ayselvanli@gmail.com

# İçindekiler



# İthaf

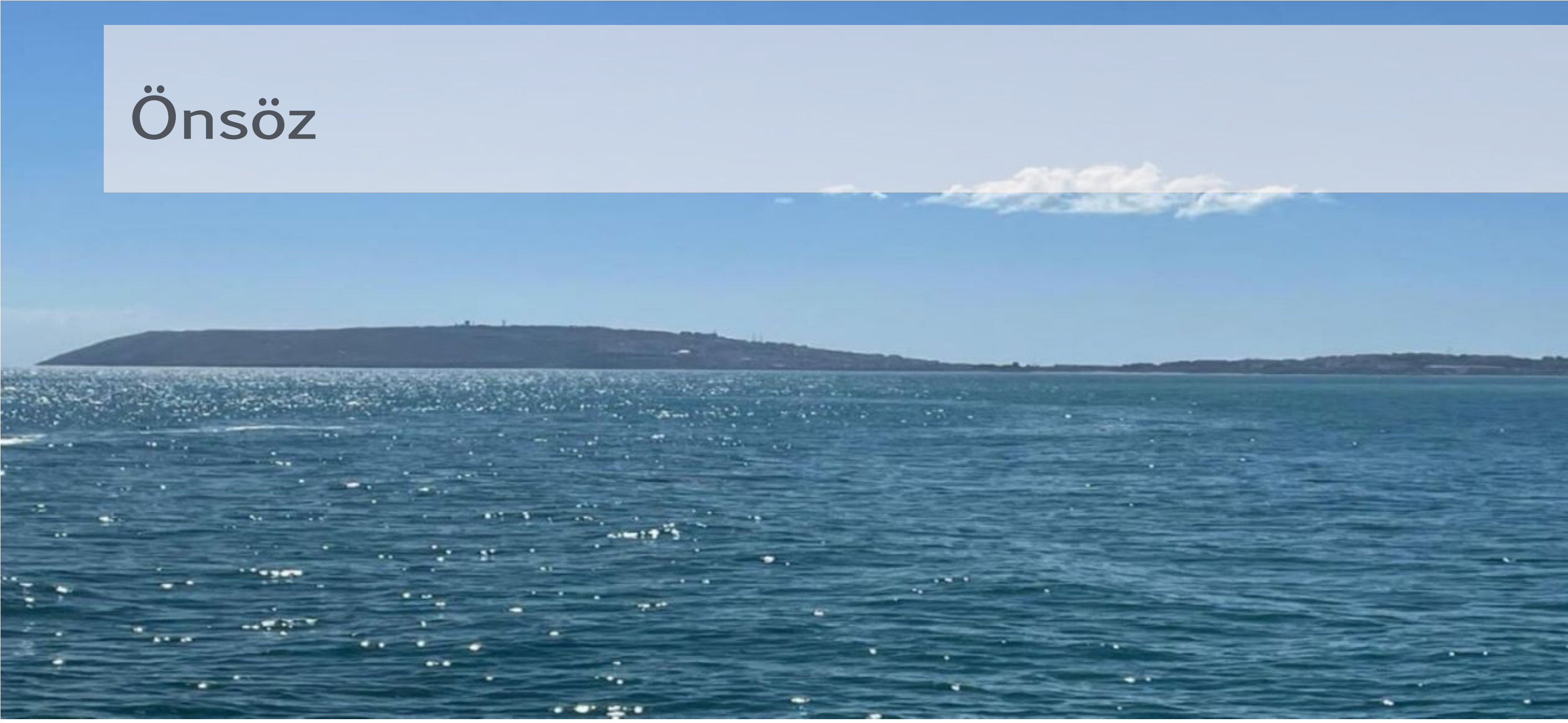


Bu kitabı annem Cemile Nazlı TURGUT, babam Halil Yakup TURGUT, eşim Ahmet VANLI ve biricik evladım Ayça Nur VANLI'ya ithaf ediyorum.

Prof. Dr. Aysel TURGUT VANLI

Ekim 2022

# Önsöz



Kalkülüsün sistematik olarak ortaya çıkışı ile birlikte bilim dünyası adeta çağ atladı. Sonsuz küçüklerle yapılabilen hesaplamaların formal olarak verilmesi birçok gelişmenin de önünü açtı. Descartes'in geometriyi cebirsel olarak ifade etmesiyle ortaya çıkan ve hızla gelişen Analitik Geometri metotları ile klasik Öklid geometrisi birçok problemi çözemiyordu. Öklid dışı geometrinin yükselişi sürse de metrik ve aksiyomatik yaklaşımlardan öteye gidemiyordu. Kalkülüsün ortaya çıkışı ile birlikte önce düzlemdeki eğrilerin sonra da yüzeylerin etraflıca incelenmesinin önü açılmış oldu. O zamana kadar doğru parçalarının belirlediği geometrik nesneler artık Öklidyen olmayan düzlem eğrilerinin belirleyici olduğu geometrik objelere genişledi. Buradaki geometriyi incelemeye müsaade eden en önemli gelişme ise eğri teğetlerin cebirsel olarak incelenebilmesiydi.

Bu alanda en büyük adım K. F. Gauss tarafından atıldı. Gauss, eğrilerin geometrisini kalkülüs araçları kullanarak inceledi ve her yüzeyin kendine ait geometrisi olduğunu kanıtladı. Böylece Öklid dışı geometriye farklı bir form kazandırdı. Gauss'un geometriyi kalkülüs ile birleştirerek ortaya koyduğu bu çalışmalar Diferensiyel Geometri'inin başlangıcı oldu. Bu nedenledir ki Gauss diferensiyel geometrinin babası olarak anılır. Gauss'un diferensiyel geometri konusundaki fikirleri esasen onun evren üzerine yaptığı gözlemlerden esinleniyordu. Gauss bununla da yetinmedi ve sahneyi Riemann'a hazırladı.

Riemann Gauss'un fikirlerini genelleştirerek manifold kavramını tanımladı. Böylece, diferensiyel geometri düşük boyutlardan yüksek boyutlara, lineer cebirdeki ileri gelişmelerin de katkısı ile büyük bir yol almış oldu. Riemann'ın yaptıkları birçok farklı matematikçi tarafından geliştirilirdi. Riemann, aynı zamanda Öklid dışı geometriler için yeni bir sınıflandırma da ortaya koymuştu. Bu yaklaşım Einstein'in relativite teorisini ifade etmesine vesile oldu ve sonuç olarak Öklid dışı geometrilerin uygulanamayacağı iddiası çürümüş oldu. Bugün geldiğimiz noktada, eğriler, yüzeyler ve genel olarak manifoldların diferensiyel geometrisi hemen her alanda uygulanmaktadır.

Kitap, diferensiyel geometrinin üç temel başlığı olan; manifoldlar, eğriler ve yüzeyleri, detaylı bir şekilde ele almaktadır. Kitapta manifoldlar konusu bir topolojik uzayı manifold yapma ve bir kümeyi manifold yapma şeklinde iki farklı yaklaşımla ele alınmaktadır. Bunlardan biri lisans öğrencilerine hitap ederken diğeri de yüksek lisans ve doktora öğrencilerine hitap etmektedir. Kitapta, önce manifold kavramı verilmesinin amacı okuyucuya genel bir geometrik yapının zihinde oluşturulmasını sağlamaktır.

Diferensiyel Geometri'nin temel direği olan Riemann manifoldunu belirleyen en önemli özellikler; üzerinde tanımlı olan metrik tensör alanı, bu metrikle bağdaşabilir koneksiyon ve manifoldun (Riemann) eğriliğidir. Bu kavramlar çok zahmetli bir matematik hesabı ile elde edilmektedir. Günümüzde bilgisayar programları kullanılarak bu hesaplamalar hızlı bir şekilde yapılabilmektedir. Kitapta bilgisayar programı olarak Mathematica hazır paket yazılımı kullanılmıaktadır. Mathematica hazır paket programında yazdığımız kodlar sayesinde hesaplama sonuçları çok kısa bir süre içinde elde edilmektedir. Kitapta bu konularla ilgili çözümlü örneklere yer verilmektedir. Bu nedenle sadece öğrenciler değil aynı zamanda bu alanda çalışan akademisyenlerde yaptıkları araştırmalarda da bu kitaptan faydalanacaklardır.

Kitapta, bir Riemann manifoldu üzerinde eğriler, yay uzunluğu ve Serret-Frenet vektör alanları ve yüksek mertebeden eğrilik kavramları verilmektedir. Bu kavramlar özele inilerek 2 ve 3- boyutlu Riemann manifoldu olan Öklid uzayında eğriler konusu anlatılmaktadır. Ayrıca konuyla ilgili Mathematica daki uygulamaları çözümlü örneklerle verilmektedir.

Kitapta 2-boyutlu manifoldlar olan soyut yüzeylerden 3-boyutlu Öklid uzayındaki yüzeyler konusuna geçilerek bir yüzeyin birinci ve ikinci temel formu, şekil operatörü, Gauss eğriliği, ortalama eğriliği, asli eğrilik ve asli vektörler örneklerle birlikte verilmektedir. Mathematica da bu kavramlarla iligili yazdığımız kodlar sayesinde hesaplama sonuçları çok kısa bir süre içerisinde elde edilmektedir. Bu hesaplama ile ilgili örnekler kitapta yer almaktadır. Diferensiyel Geometri'nin en meşhur denklemleri olan Gauss ve Codazzi denklemlerinin elde edilmesi, Gauss'un meşhur teoremine de kitapta yer verilmektedir.

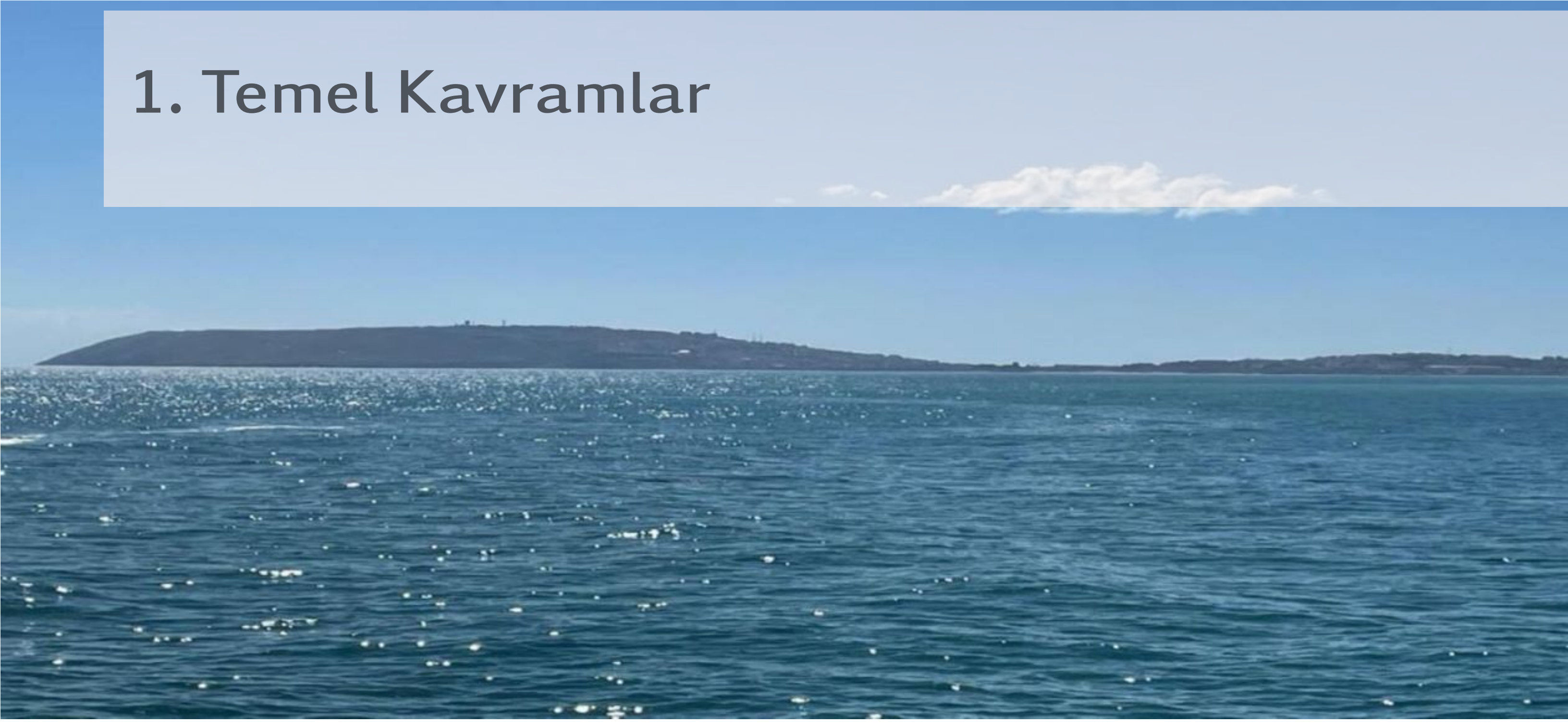
Diferensiyel geometri, matematik bölümlerinde okutulmakla birlikte fizik, jeodezi ve fotogrametri, harita, jeoloji, makine, havacılık ve uçak gibi mühendislik bölümlerinde de verilmektedir. Diğer yandan, diferensiyel geometri dersleri birçok alanda lisansüstü seviyesinde okutulmaktadır. Bu kitap, uzun yıllar Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde lisans ve lisansüstü düzeyde okuttuğum Diferensiyel Geometri dersi notlarının kitaba bürünmüş halidir. Modernleşen bilimsel yaklaşımların ve değişen öğrenci profillerinin göz önüne alındığı, okunabilirliği yüksek, yeni nesil bir diferensiyel geometri kitabı yazma gayesiyle yola çıktım. Yaklaşık dört yıl süren bir çalışmanın sonucunda kitabı tamamlayarak siz değerli okuyucularla buluşturmanın mutluluğu içerisindeyim.

Kitabın ilk baskısı olduğundan göremediğim hatalar olabilir. Kitabın eksiksiz olarak yenilenmesi için tespit ettiğiniz muhtemel hataları ayselvanli@gmail.com adresine göndermeniz beni mutlu edecektir.

Kitabın hazırlanmasın da emeği olan başta Gazi Üniversitesi Matematik bölümü öğrencilerine, kitabı kontrol eden doktora öğrencim Doç. Dr. İnan ÜNAL'a, kitabın Latex yazılmasında doktora öğrencim Gamze ALKAYA, yüksek lisans öğrencim Sümeyye AKPINAR'a , Mathematica kod yazılımında doktora öğrencimiz Bircan DÖNMEZ'e, kitabın kapak tasarımında yüksek lisans öğrencimiz Furkan SEÇKİN'e ve lisans öğrencimiz Yusuf GÜDÜCÜ'ye yaptıkları yardımdan dolayı çok teşekkür ederim. İlk günden itibaren hiç desteğini esirgemeyen sevgili eşim Ahmet VANLI ve kızım Ayça Nur VANLI'ya şükranlarımı sunarım.

Kitabın faydalı olması dileğiyle.

Prof. Dr. Aysel TURGUT VANLI
Gazi Üniversitesi Matematik Bölümü
Ekim 2022



# 1. Temel Kavramlar

*Bu bölümde diferensiyel geometrinin temelini teşkil edecek kavramlar verilecektir. Bu kitapta aksi söylenmedikçe tüm kümeler boştan farklıdır.*

## 1.1 Öklid Uzayı

*Bu kesimde diferensiyel geometrinin temelini teşkil edecek bazı kavramlar verilecektir.*

**Tanım 1.1** $V$ bir küme ve $\oplus$ ile $\odot$ işlemleri

$$\oplus : V \times V \to V$$
$$\odot : \mathbb{R} \times V \to V$$

olmak üzere

i. $(V, \oplus)$ bir Abel grubu,

ii. $\forall v, u \in V$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için

- $(a \odot b) \odot v = a \odot (b \odot v)$
- $(a \oplus b) \odot v = (a \odot v) \oplus (b \odot v)$
- $a \odot (v \oplus u) = (a \odot v) \oplus (a \odot u)$
- $1 \odot v = v$

özellikleri sağlandığında $((V, \oplus), (\mathbb{R}, +, .), \odot)$ altılısına bir **vektör uzayı** denir. $V$ nin elemanlarına da **vektör** denir.

**Örnek 1.1** $\mathbb{R}^n = \{p \mid p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) : \ p_i \in \mathbb{R}, \ 1 \leq i \leq n\}$
kümesini göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} \oplus : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \ (p,q) \to p \oplus q = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, \ldots, p_n + q_n) \\ \odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \ (\lambda, p) \to \lambda \odot p = (\lambda p_1, \lambda p_2, \ldots, \lambda p_n) \end{aligned}$$

tanımlanan işlemler ile birlikte $((\mathbb{R}^n, \oplus), (\mathbb{R}, +, .), \odot)$ bir vektör uzayıdır.

**Tanım 1.2** $V$ bir vektör uzayı olmak üzere

$$\begin{aligned} <,>: V \times V &\to \mathbb{R} \\ (u,v) &\to < u, v > \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $<,>$ fonksiyonu

- $< u, v > = < v, u >$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için $< \lambda u + \mu v, z > = \lambda < u, z > + \mu < v, z >$
- $v \neq 0$ için $< v, v > \geqslant 0, \ v = 0 \Leftrightarrow < v, v > = 0$

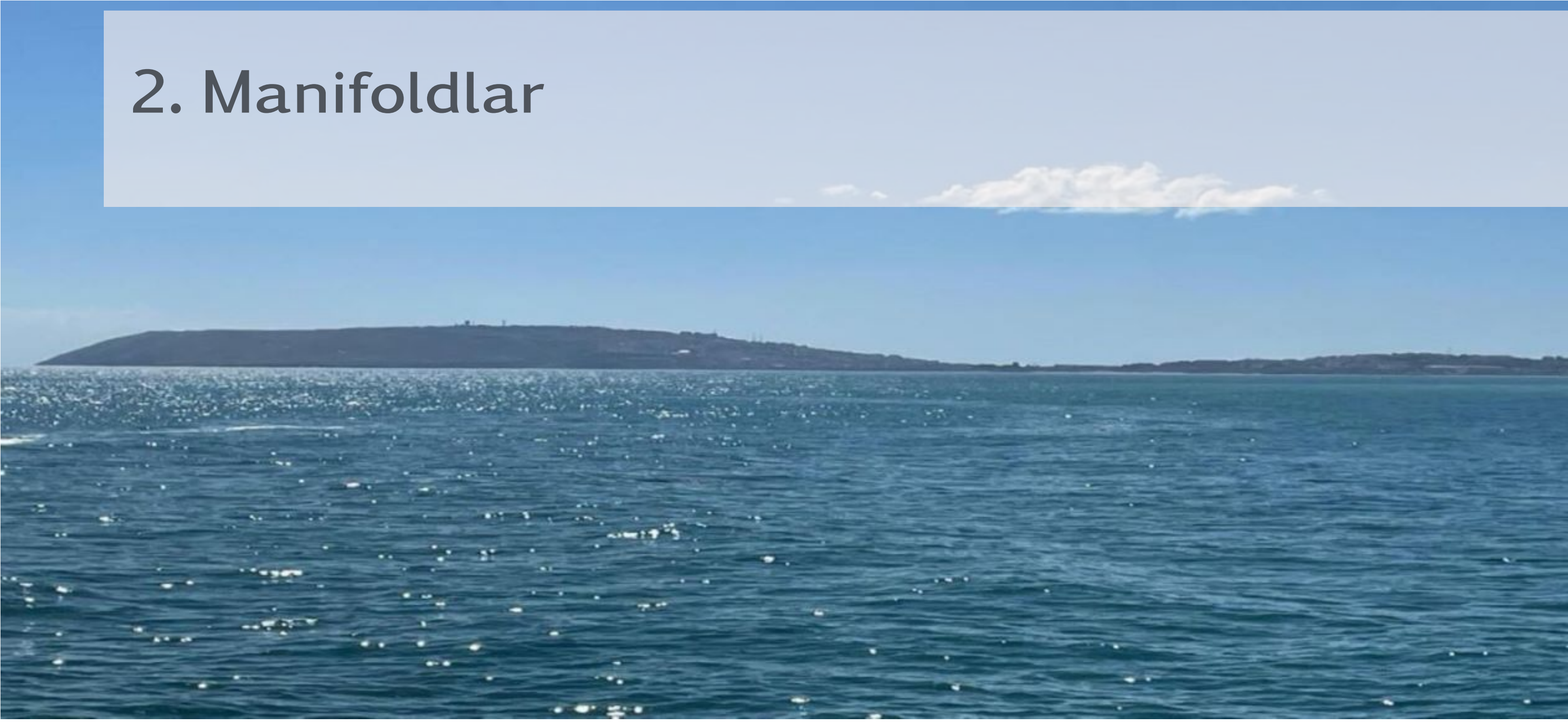
özelliklerini sağladığında $<,>$ fonksiyonuna $V$ üzerinde bir iç çarpım fonksiyonu, $(V, <,>)$ ikilisine bir **iç çarpım uzayı** ve $< u, v >$ sayısına da $u$ ile $v$ nin **iç çarpımı** denir.

**Örnek 1.2**

$$\begin{aligned} <,>: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (p,q) &\to < p, q > = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm $\mathbb{R}^n$ de bir iç çarpım fonksiyonudur ve $(\mathbb{R}^n, <,>)$ ikilisi de bir iç çarpım uzayıdır. Bu iç çarpıma **doğal ya da Öklid iç çarpımı** denir.

ÖKLİD : M.Ö. 330-275 yılları arasında yaşamış İskenderiyeli bir matematikçidir. Öklid, eğitimini Atina'da Platon'un ünlü akademisinde tamamladıktan sonra Yunan Kralı I. Ptolemy'un isteği ile İskenderiye'de İskenderiye Kraliyet Enstitüsü'nde büyük bir matematik okulu kurdu. Öklid 13 ciltlik "Elemanlar" adlı kitap yazmıştır.



# 2. Manifoldlar

## 2.1 Topolojik Uzayı Manifold Yapma

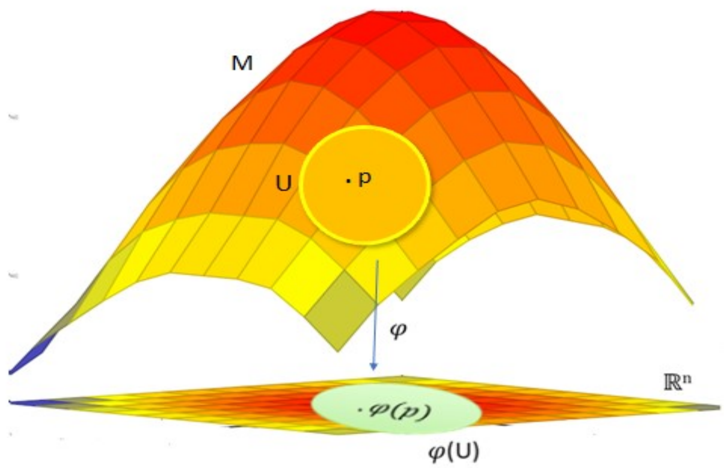
*Bu kesimde manifold kavramını öğreneceğiz. Literatürde iki farklı yol vardır. Bunlardan biri, bir topolojik uzay üzerinde manifold tanımı diğeri de bir küme üzerinde manifold tanımıdır.*
*Biz bu kesimde bir topolojik uzay üzerinde bir manifold nasıl tanımlanır öncelikle bu kavramı öğreneceğiz.*
*Bir sonraki kesimde ise bir $M$ kümesi üzerinde bir manifold kavramının nasıl tanımlanacağını vereceğiz. Bu iki kesim de birbirinden bağımsız olarak verilecektir. Bu ders kitabı sınıfın seviyesine göre istenirse sadece bu iki kesimden bir tanesi anlatılacak şekilde sunulacaktır. Eğer istenirse her iki kesim de anlatılabilir. Ayrıca bir küme üzerinde manifold kavramı yüksek lisans derslerinde de anlatılabilir.*
*Manifold kavramını anlamak bazı öğrencilere zor gelmektedir. Burada amacımız görselliğe fazla bağlı kalarak öğrenciye manifold kavramını görsellikle kavratmaktır.*

### 2.1.1 Topolojik Manifold

**Tanım 2.1** $M$ bir topolojik uzay olsun. $M$ nin her bir $p$ noktasının $\mathbb{R}^n$ in bir $V$ açık alt kümesine homeomorfik olan bir $U$ açık komşuluğu varsa $M$ ye bir **topolojik manifold** denir. Yani

$$\forall p \in M \text{ için } p \in U,\ \exists U \text{ açık komşuluğu var } \ni \varphi : U \xrightarrow{homeomorfizm} V \subset \mathbb{R}^n$$

dir. $(\varphi, U)$ ikilisine $M$ topolojik uzayın bir $n-$ **boyutlu haritası**, $U$ ya **koordinat komşuluğu** denir. $\varphi$ ye de **koordinat dönüşümü** (veya **koordinat sistemi**) denir (Şekil 2.1). $\varphi(p) = 0$ ise $(\varphi, U)$ haritasına $p \in U$ noktasında **merkezleyendir** denir.




Şekil 2.1

Yukarıdaki tanıma göre $n-$ boyutlu bir topolojik manifold lokal olarak $\mathbb{R}^n$ uzayı üzerinde alışılmış topoloji ile birlikte olan topolojik uzay yani Öklid uzayına benzerdir, yani homeomorfiktir.

**Tanım 2.2** Bir topolojik uzay $M$ ve $M$ nin $n$- boyutlu bir haritası $(\varphi, U)$ olsun. $\mathbb{R}^n$ uzayındaki doğal koordinat fonksiyonları $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ise

$$u_i = x_i \circ \varphi$$

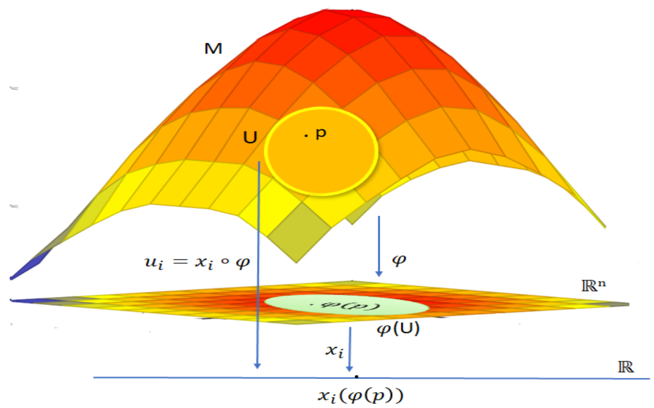
- Eşitliğiyle tanımlı $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ fonksiyonlarına $(\varphi, U)$ haritasının koordinat fonksiyonları
- $p \in M$ olmak üzere $(u_1(p), u_2(p), \ldots, u_n(p))$ sayısına $p$ noktasının $(\varphi, U)$ haritasına göre koordinatları

denir (Şekil 2.2).

**Teorem 2.1** Bir topolojik manifold $M$ ve $M$ nin $n-$ boyutlu bir haritası $(\varphi, U)$ olsun. $(\varphi, U)$ haritasının koordinat fonksiyonları $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ olmak üzere $\varphi = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dir.

**İspat:** $\forall p \in U$ için $\varphi(p) \in \mathbb{R}^n$ olduğundan $\varphi(p)$ noktası bir $n$- lidir. Şekil 2.2 yi göz önüne alalım. $\forall p \in U$ için

$$\begin{aligned}
\varphi(p) &= (x_1(\varphi(p)), x_2(\varphi(p)), \ldots, x_n(\varphi(p))) \\
&= ((x_1 \circ \varphi)(p), (x_2 \circ \varphi)(p), \ldots, (x_n \circ \varphi)(p)) \\
&= (u_1(p), u_2(p), \ldots, u_n(p)) \\
&= (u_1, u_2, \ldots, u_n)(p)
\end{aligned}$$



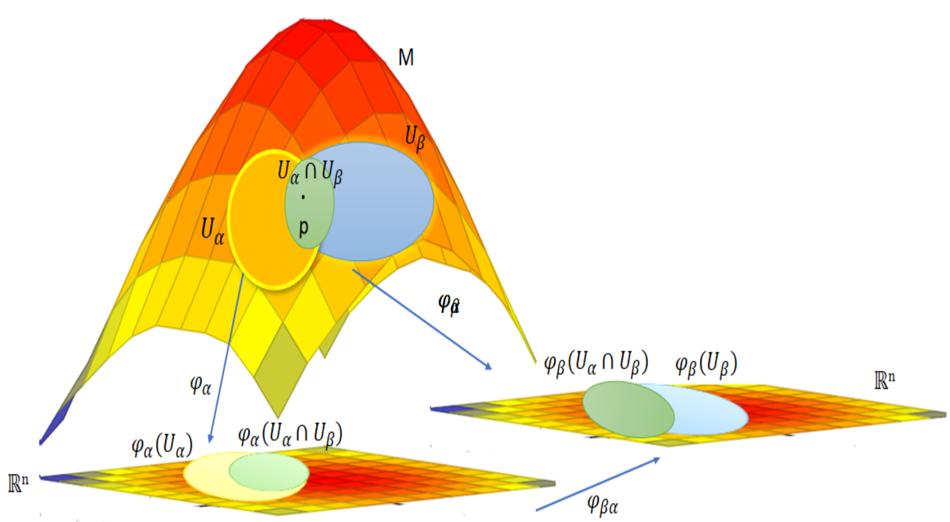

Şekil 2.2

dir. Buradan $\varphi = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dir.

**Tanım 2.3** Bir topolojik manifold $M$ ve $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$, $(\varphi_\beta, U_\beta)$ $M$ nin $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olacak şekilde iki $n-$ boyutlu haritası olsun. $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ kümesi $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ de $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ kümesi $\varphi_\beta(U_\beta)$ de açık ve

$$\varphi_{\beta\alpha} : \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümü bir homeomorfizm ise bu iki haritaya **topolojik olarak örtüşürler**, $\varphi_{\beta\alpha}$ fonksiyonuna da haritalar arasında **dönüşüm fonksiyonu** denir (Şekil 2.3).




Şekil 2.3

## 2.2 Kümeyi Manifold Yapma*

*Bir önceki kesimde bir topolojik uzayı nasıl manifold yapılacağını öğrendik. Manifold kavramı sadece topolojik uzaylar üzerinde mi kurulur? Matematikte kavramlar bir küme üzerinde tanımlanırken neden manifold kavramı bir topolojik uzay üzerinde tanımlanmaktadır? Bir kümeyi manifold yapamaz mıyız? Elbette bir kümeyi manifold yapabiliriz ama bu kavram lisans programındaki öğrenciler için biraz zor gelir düşüncesinden dolayı bir topolojik uzayı manifold yapma kavramı anlatılmaktadır.*
*Bu kitapta her iki konu da birbirinden bağımsız olarak verilecektir.*
*Bu kesimde bir $M$ kümesinin nasıl manifold yapıldığı anlatılacaktır. Bu ders kitabı sınıfın seviyesine göre istenirse sadece bu iki kesimden bir tanesi anlatılacak şekilde sunulacaktır. Eğer istenirse her iki kesim de anlatılabilir. İstenirse bu kesim yüksek lisans derslerinde de anlatılabilir.*

### 2.2.1 Kümeyi Manifold Yapma

**Tanım 2.11** $M$ bir küme ve $M$ nin bir alt kümesi $U$ olsun.

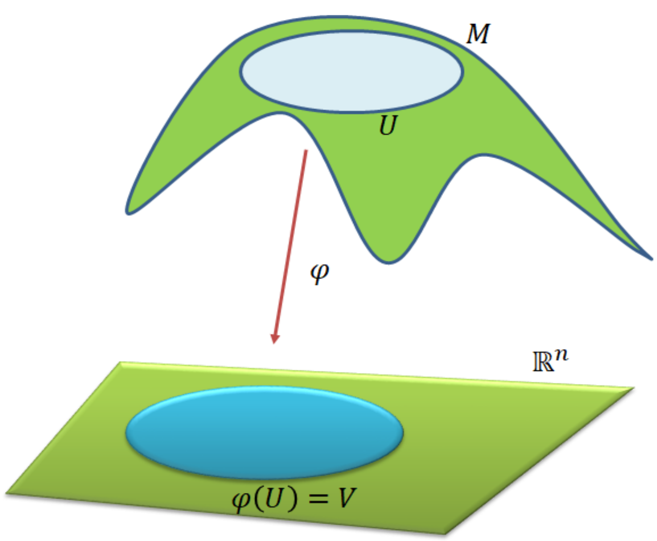
$$\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$$

i. $\varphi$ bire-bir

ii. $\varphi$ örten (yani $\varphi(U) = V$)

iii. $V$ alt kümesi $\mathbb{R}^n$ de açık

ise $(\varphi, U)$ ikilisine $M$ üzerinde bir $n$- **boyutlu harita** denir (Şekil 2.11).

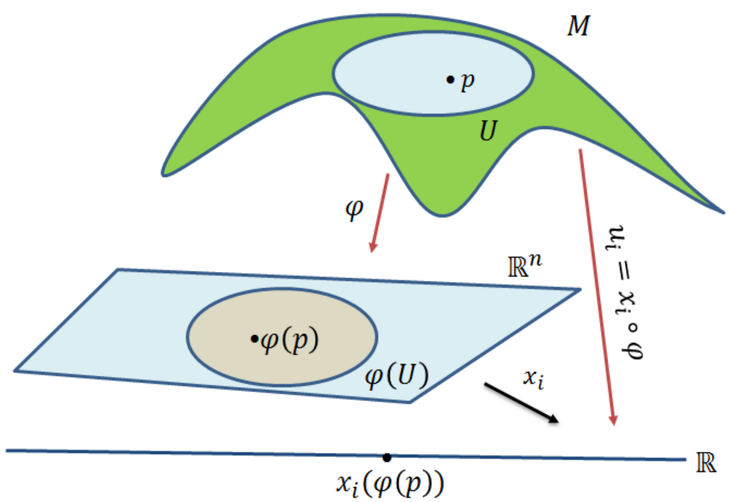



Şekil 2.11

**Tanım 2.12** $M$ bir küme ve $M$ nin bir $n$- boyutlu haritası $(\varphi, U)$ olsun. $\mathbb{R}^n$ uzayındaki (doğal) Öklid koordinat fonksiyonları $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ise

$$u_i = x_i \circ \varphi$$

• eşitliğiyle tanımlı $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ fonksiyonlarına, $(\varphi, U)$ haritasının **koordinat fonksiyonları**
•$p \in U$ olmak üzere $(u_1(p), u_2(p), \ldots, u_n(p))$ sayısına $p$ ***noktasının*** $(\varphi, U)$ ***haritasına göre koordinatları***
• $U$ ya da ***koordinat komşuluğu***
denir (Şekil 2.12).



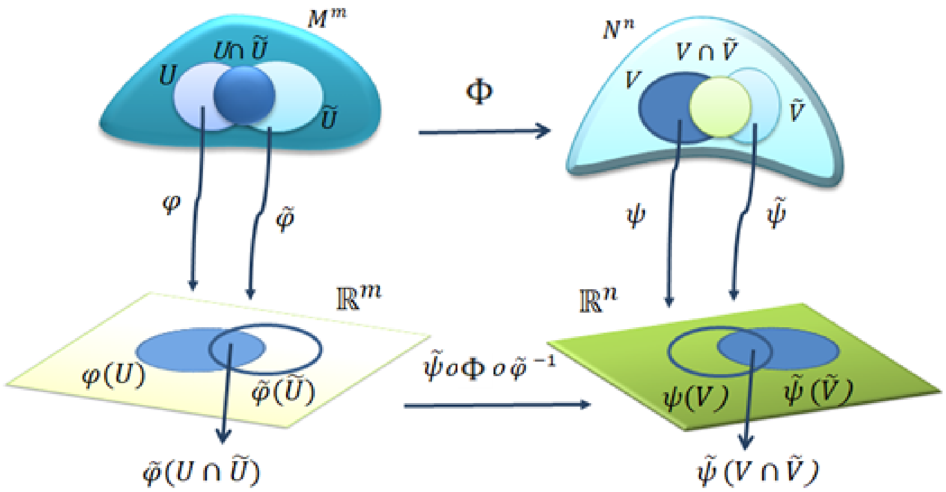

Şekil 2.12

**Teorem 2.3** $M$ bir küme ve $M$ nin bir $n$- boyutlu haritası $(\varphi, U)$ olsun. $(\varphi, U)$ haritasının koordinat fonksiyonları $u_1, u_2, \ldots, u_n$ olmak üzere $\varphi = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dir.

**İspat:** $\forall p \in U$ için $\varphi(p) \in \mathbb{R}^n$ olduğundan $\varphi(p)$ noktası bir $n$–lidir. Şekil 2.12 yi göz önüne alalım. $\forall p \in U$ için

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= (x_1(\varphi(p)), x_2(\varphi(p)), \ldots, x_n(\varphi(p))) \\ &= ((x_1 \circ \varphi)(p), (x_2 \circ \varphi)(p), \ldots, (x_n \circ \varphi)(p)) \\ &= (u_1(p), u_2(p), \ldots, u_n(p)) \\ &= (u_1, u_2, \ldots, u_n)(p) \end{aligned}$$

dir. Buradan $\varphi = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dir.




Şekil 3.6

dönüşümün bileşkesi

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{\psi} \circ \psi^{-1}\right) \circ \left(\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}\right) \circ \left(\varphi \circ \widetilde{\varphi}^{-1}\right) &= \widetilde{\psi} \circ \left(\psi^{-1} \circ \psi\right) \circ \Phi \circ \left(\varphi^{-1} \circ \varphi\right) \circ \widetilde{\varphi}^{-1} \\ &= \widetilde{\psi} \circ \Phi \circ \widetilde{\varphi}^{-1}\end{aligned}$$

bulunur. Bu üç fonksiyon düzgün olduğundan bunların bileşkeleri de düzgündür.

**Teorem 3.6** $\Phi : M \to N$ düzgün bir dönüşüm ve $M$ nin bir açık alt kümesi $U$ olsun. Bu durumda $\Phi_{|_U} : U \to N$ dönüşümü düzgündür.

**Örnek 3.4** $M$ ve $N$ boyutları $m$ ve $n$ olan iki düzgün manifold olmak üzere

$$\begin{aligned}\pi_M : M \times N &\to M \\ (p,q) &\to \pi_M(p,q) = p\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\pi_N : M \times N &\to N \\ (p,q) &\to \pi_N(p,q) = q\end{aligned}$$

dönüşümlerinin düzgün olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** $M$ nin bir haritası $(\varphi, U)$ ve $N$ nin bir haritası $(\psi, V)$ olsun. Bu durumda $(\varphi \times \psi, U \times V)$, $M \times N$ nin bir haritasıdır.
$\pi_M$ izdüşüm fonksiyonunun düzgün olduğunu gösterelim.

$(z_1, z_2, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_{m+n}) \in \mathbb{R}^{m+n}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
(\varphi \circ \pi_M \circ (\varphi \times \psi)^{-1})(z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_{m+n}) &= ((\varphi \circ \pi_M)((\varphi^{-1} \times \psi^{-1}))(z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_{m+n})) \\
&= (\varphi \circ \pi_M)(\varphi^{-1}(z_1, \ldots, z_m), \psi^{-1}(z_{m+1}, \ldots, z_{m+n})) \\
&= \varphi(\pi_M(\varphi^{-1}(z_1, \ldots, z_m), \psi^{-1}(z_{m+1}, \ldots, z_{m+n}))) \\
&= \varphi(\varphi^{-1}(z_1, \ldots, z_m)) \\
&= I_{\mathbb{R}^m}(z_1, \ldots, z_m)
\end{aligned}
$$

dir. Bu dönüşüm düzgün olduğundan $\pi_M$ dönüşümü düzgündür.
Benzer olarak $\pi_N$ dönüşümünün de düzgün olduğu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
(\psi \circ \pi_N \circ (\varphi \times \psi)^{-1})(z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_{m+n}) &= (\psi \circ \pi_N)((\varphi^{-1} \times \psi^{-1}))(z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_{m+n}) \\
&= (\psi \circ \pi_N)(\varphi^{-1}(z_1, \ldots, z_m), \psi^{-1}(z_{m+1}, \ldots, z_{m+n})) \\
&= \psi(\pi_N(\varphi^{-1}(z_1, \ldots, z_m), \psi^{-1}(z_{m+1}, \ldots, z_{m+n})) \\
&= \psi(\psi^{-1}(z_{m+1}, \ldots, z_{m+n})) = I_{\mathbb{R}^n}(z_{m+1}, \ldots, z_{m+n})
\end{aligned}
$$

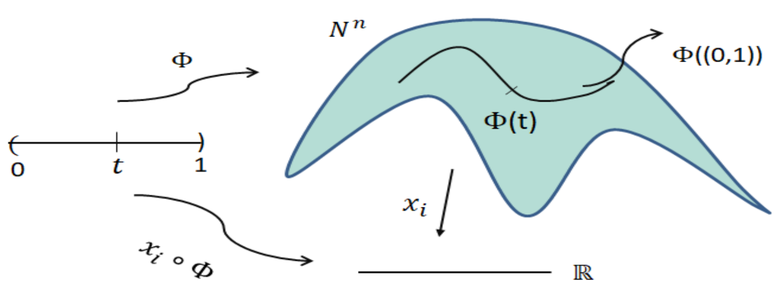
dir. Bu dönüşüm düzgün olduğundan $\pi_N$ dönüşümü de düzgündür.

**Örnek 3.5** $N = \mathbb{R}$ alınırsa $\Phi : M \xrightarrow{\text{düzgün}} N = \mathbb{R}$ dönüşümü $\Phi \in \mathscr{F}(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ olur.

**Örnek 3.6** (Manifold üzerindeki düzgün eğri)
$M = (0, 1)$ seçersek bu bir 1- boyutlu düzgün manifoldtur. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
\Phi : (0,1) &\xrightarrow{\text{düzgün}} N \\
t &\xrightarrow{\Phi} (t)
\end{aligned}
$$

dönüşümüne $N$ manifoldu üzerinde bir düzgün eğri denir (Şekil 3.7).




Şekil 3.7

# 4. Riemann Manifoldları

## 4.1 Manifold Üzerinde Koneksiyon

*Bu kesimde manifoldlar üzerinde koneksiyon kavramını öğreneceğiz.*

**Tanım 4.1** $n$- boyutlu düzgün bir manifold $M$ olsun.

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall f \in \mathscr{F}(M)$ ve $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

K.1) $\nabla_{\lambda X + \mu Y} Z = \lambda \nabla_X Z + \mu \nabla_Y Z$

K.2) $\nabla_X (\lambda Y + \mu Z) = \lambda \nabla_X Y + \mu \nabla_X Z$

K.3) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$

K.4) $\nabla_X (fY) = f\, \nabla_X Y + X[f] Y$

şartlarını $\nabla$ sağlıyorsa bu dönüşüme $M$ üzerinde bir **koneksiyon (veya lineer koneksiyon)** denir. $\nabla_X Y$ vektör alanına da $Y$ vektör alanının $X$ vektör alanı yönündeki **kovaryant türevi** denir.

**(K.1)** ve **(K.3)** şartları ayrıca $\nabla$ nın birinci değişkene göre $\mathscr{F}(M)$ lineer olduğunu, yani $\forall f, g \in \mathscr{F}(M)$ ve $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\nabla_{fX + gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z$$

olduğunu gösterir.

**K.4** şartından ise $\nabla$ nın ikinci değişken için $\mathscr{F}(M)$ lineerlik özelliğinin geçerli olmadığını görüyoruz.

Özel olarak $X = \partial_k$, $Y = \partial_l$ baz vektör alanlarını alalım. $\nabla_{\partial_k}\partial_l \in \chi(M)$ olduğundan $\chi(M)$ nin bazlarının lineer bileşenleri olarak yazabiliriz. $\nabla_{\partial_k}\partial_l$ vektör alanının bileşenlerini $\Gamma_{kl}^m$ ile gösterelim. O zaman

$$\nabla_{\partial_k}\partial_l = \sum_{m=1}^{n} \Gamma_{kl}^m \partial_m$$

dir. Böylece $\nabla_{\partial_k}\partial_l$ nin bileşeni

$$\Gamma_{kl}^m : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R},\ m = 1, 2, \ldots, n$$

olur. Burada $\Gamma_{kl}^m$ fonksiyonlarına $\nabla$ nın bileşenleri denir. Bu fonksiyonlara **Christoffel sembolleri** denir.

**Teorem 4.1** $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $X = \sum_{k=1}^{n} X_k \partial_k$ ve $Y = \sum_{l=1}^{n} Y_l \partial_l$ olmak üzere $Y$ vektör alanının $X$ vektör alanı yönündeki kovaryant türevi

$$\nabla_X Y = \sum_{m=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{n} X_k \partial_k [Y_m] + \sum_{k,l=1}^{n} X_k Y_l \Gamma_{kl}^m \right) \partial_m$$

dir.

**İspat:** $X = \sum_{k=1}^{n} X_k \partial_k$ ve $Y = \sum_{l=1}^{n} Y_l \partial_l$ olsun. $Y$ vektör alanının $X$ vektör alanı

Elwin Bruno Christoffel: Bir Alman matematikçisi olan Elwin Bruno Christoffel, 1829 tarihinde Montschau, Rheinland'de doğdu. Önce Zürich Polytechnicum'unda, sonra Berlin ve Strasbourg Üniversitelerinde matematik profesörü olarak çalıştı. Özellikle; Abel fonksiyonları, cebirsel fonksiyonlar, parçalı türevli denklemler ve diferansiyel geometri üzerinde çalışmalarda bulundu. Riemann ile birlikte matematiğe tensör kavramını getirdiler ve tensör hesabı üzerinde çalıştı. 1900 yılında Strasbourg'da öldü.

lir ve bunun için de $2\pi rad = 360°$ dönüşümü kullanılır. Seçim çoğunlukla ihtiyaca bağlıdır. Denizcilik uygulamalarında derece ölçüsü kullanılırken,dönüş mekaniği gibi bazı fizik uygulamalarında ise dairenin çevresinin ($c$) yarıçapına ($r$) oranına dayanan radyan ölçüsü kullanılır ($c = 2\pi r$). Kutupsal koordinatlar $r$ ve $\theta$ yı kartezyen koordinatlara şu şekilde dönüştürülebilir.

$$x = r\cos\theta \quad \text{ve} \quad y = r\sin\theta$$

dır. Bu iki formüle göre $x$ ve $y$ cinsinden elde edilen dönüşüm formülleri ise

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \arctan\frac{y}{x} \quad x \neq 0$$

dir. Eğer $x = 0$ ve

- $y$ pozitif ise $\theta = 90°(\frac{\pi}{2}rad)$
- $y$ negatif ise $\theta = 270°(\frac{3\pi}{2}rad)$

olur. Şimdi kutupsal koordinatın kullanıldığı bazı alanlardan bahsedelim.

a) **Robot bilimi**
Hareket edebilen çoğu robot, kutupsal koordinat sisteminden yararlanır. Bu yapay zeka için önemlidir. Çünkü koordinat sistemin merkezini (kutbunu) daima robotun o andaki konumu belirler. Dolayısıyla, robotun herhangi bir zamanda koordinat sisteminin neresinde olduğunu hesaplamasına gerek yoktur. Tek gereken, hangi yönde ve ne kadar uzağa gideceğini belirlemesidir. Eğer robotlar kartezyen koordinat sistemini kullanarak yol alsalardı, hareket için gerekli uzaklık ve açı hesaplamaları için cebir ve trigonometri kullanmak gerekirdi. Oysa kutupsal koordinat sistemindeki bir açı ile ifade edilen yön ile uzaklık robotun tam istenen yere gitmesini sağlamak için yeterlidir.

b) **Havacılık**
Uçaklar, seyir için kutupsal koordinat sisteminin biraz değiştirilmiş bir çeşidini kullanırlar. Bu sistemde, genellikle "yön 360" (heading 360) olarak adlandırılan 0° ışını dikeydir ve açılar saatin tersi yönde değil, saat yönünde devam eder. Yön 360 manyetik kuzeye denk gelirken, 90, 180 ve 270 yönleri de sırasıyla manyetik doğu, güney ve batıya denk gelir. Örneğin doğuya doğru 5 deniz mili kadar yol alacak bir uçak, yön 90 üzerinde 5 birim katedecek demektir.

Şimdi $\mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlanan kutupsal koordinatlardan elde edilen metrik tensörü aşagıdaki örnekte hesaplanacaktır. Elde edilen bu metrik tensör ile birlikte $\mathbb{R}^2$ bir 2-boyutlu Riemann manifoldudur.

**Örnek 4.5**

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) &\longrightarrow \varphi(r,\ theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{aligned}$$

kutupsal koordinatları verilsin. Bu koordinatlara göre;

a) $g$ metriğinin bileşenlerini

b) Christoffel sembollerini

c) Levi-Civita koneksiyonunun baz vektörlerin de aldığı değerleri

d) $\forall X, Y \in \chi(\mathbb{R}^2)$ için $\nabla_X Y$ ifadesini

e) $X = (1, 0)$ ve $Y = (r^2, 2\theta)$ olmak üzere $\nabla_X Y$ yi

bulunuz.

**Çözüm:**

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) &\longrightarrow \varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{aligned}$$

olup buradan $\partial_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta)$ ve $\partial_\theta = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta)$ olur.
**a)** $g$ metriğinin bileşenleri

$$\begin{aligned} g_{rr} = g_{11} = g(\partial_r, \partial_r) =&< \partial_r, \partial_r > =< (\cos\theta, \sin\theta), (\cos\theta, \sin\theta) >, \\ &= 1 \\ g_{r\theta} = g_{12} = g(\partial_r, \partial_\theta) =&< \partial_r, \partial_\theta > =< (\cos\theta, \sin\theta), (-r\sin\theta, r\cos\theta) >, \\ &= 0 \\ g_{\theta\theta} = g_{22} = g(\partial_\theta, \partial_\theta) =&< \partial_\theta, \partial_\theta > =< (-r\sin\theta, r\cos\theta), (-r\sin\theta, r\cos\theta) > \\ &= r^2 \end{aligned}$$

bulunur. Aynı zamanda $g$ simetrik olduğundan $g_{21} = g_{12} = 0$ olur. Buradan

$$[g_{r\theta}] = \begin{bmatrix} g_{rr} & g_{r\theta} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Matrisin tersi

$$[g_{r\theta}]^{-1} = [g^{r\theta}] = \begin{bmatrix} g^{rr} & g^{r\theta} \\ g^{\theta r} & g^{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{detg} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix}$$

dir. Buradan

$$\partial_r[g_{r\theta}] = \begin{bmatrix} g_{rr,r} & g_{r\theta,r} \\ g_{\theta r,r} & g_{\theta\theta,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2r \end{bmatrix}$$

$$\partial_\theta[g_{r\theta}] = \begin{bmatrix} g_{rr,\theta} & g_{r\theta,\theta} \\ g_{\theta r,\theta} & g_{\theta\theta,\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır.
**b)** Teorem 4.4 ten Christoffel sembolleri

$$\Gamma_{kl}^m = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{2} g^{hm}(g_{lh,k} + g_{hk,l} - g_{kl,h})$$

ve

$$\begin{aligned}
\nabla_Y X &= \nabla_{\frac{3}{2}r\theta\partial_r} X = \frac{3}{2}r\theta\nabla_{\partial_r} X \\
&= \frac{3}{2}r\theta\nabla_{\partial_r}\left(\frac{5}{2}r^4\partial_r + 2\theta^2\partial_\theta\right) \\
&= \frac{3}{2}r\theta(\partial_r[\frac{5}{2}r^4]\partial_r + \frac{5}{2}r^4\nabla_{\partial r}\partial_r + \partial_r[2\theta^2]\partial_\theta + 2\theta^2\nabla_{\partial r}\partial_\theta \\
&= 15r^4\theta\partial_r + 6r\theta^2\partial_\theta + 3\theta^3\partial_\theta \\
&= 15r^4\theta\partial_r + (6r\theta^2 + 3\theta^3)\partial_\theta
\end{aligned}$$

olur.

f. $X = \frac{5}{7}r^3\theta^3\partial_\theta$ $Y = \frac{3}{5}r\theta^2\partial_r + r\theta\partial_\theta$ vektör alanları için

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_{\frac{5}{7}r^3\theta^3\partial_\theta} Y = \frac{5}{7}r^3\theta^3\nabla_{\partial_\theta} Y \\
&= \frac{5}{7}r^3\theta^3\nabla_{\partial_\theta}\left(\frac{3}{5}r\theta^2\partial_r + r\theta\partial_\theta\right) \\
&= \frac{5}{7}r^3\theta^3(\partial_\theta\left[\frac{3}{5}r\theta^2\right]\partial_r + \frac{3}{5}r\theta^2\nabla_{\partial_\theta}\partial_r + \partial_\theta\left[r\theta\right]\partial_\theta + r\theta\nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta \\
&= \frac{6}{7}r^4\theta^4\partial_r + \frac{3}{7}r^3\theta^5\partial_\theta + \frac{5}{7}r^4\theta^3\partial_\theta - \frac{5}{7}r^5\theta^4\partial_r \\
&= (\frac{6}{7}r^4 - \frac{5}{7}r^5\theta^4)\partial_r + (\frac{3}{7}r^3\theta^5 + \frac{5}{7}r^4\theta^3)\partial_\theta
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\nabla_Y X &= \nabla_{\frac{3}{5}r\theta^2\partial_r + r\theta\partial_\theta} X = \frac{3}{5}r\theta^2\nabla_{\partial_r} X + r\theta\nabla_{\partial_\theta} X \\
&= \frac{3}{5}r\theta^2\nabla_{\partial_r}\left(\frac{5}{7}r^3\theta^3\partial_\theta\right) + r\theta\nabla_{\partial_\theta}\left(\frac{5}{7}r^3\theta^3\partial_\theta\right) \\
&= \frac{3}{5}r\theta^2\left(\partial_r\left[\frac{5}{7}r^3\theta^3\right]\partial_\theta + \frac{5}{7}r^3\theta^3\nabla_{\partial r}\partial_\theta\right) + r\theta\left(\partial_\theta\left[\frac{5}{7}r^3\theta^3\right]\partial_\theta + \frac{5}{7}r^3\theta^3\nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta\right) \\
&= \frac{9}{7}r^3\theta^5\partial_\theta + \frac{3}{7}r^3\theta^5\partial_\theta + \frac{15}{7}r^4\theta^3\partial_\theta - \frac{5}{7}r^5\theta^4\partial_r \\
&= -\frac{5}{7}r^5\theta^4\partial_r + \left(\frac{12}{7}r^3\theta^5 + \frac{15}{7}r^4\theta^3\right)\partial_\theta
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

**Alıştırma 4.2**

$$\begin{aligned}
\psi \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\
(u,v,w) \quad &\to \quad \psi(u,v,w) = (u\cos v\ , u\sin v\ , w)
\end{aligned}$$

şeklinde verilen silindirik koordinat sistemine göre aşağıdaki vektör alanları için $\nabla_X Y$ ve $\nabla_Y X$ ifadelerini bulunuz.

a. $X = u^2\partial_u + v^3\partial_v + \partial_w$ , $Y = uv^2\partial_u + u^2v^2\partial_v$

b. $X = uv^2\partial_u + uw\partial_w$ , $Y = uw\partial_u + vw\partial_w$

c. $X = u^2v^2\partial_u + uw\partial_w + w^3\partial_w$ , $Y = u^2w\partial_u + vw\partial_v$

d. $X = uw^2\partial_v + uv\partial_w$ , $Y = vw\partial_u + uw\partial_v + vw\partial_w$

e. $X = v\partial_u + w\partial_v + u\partial_w$ , $Y = uv\partial_u + v\partial_v + w\partial_w$

f. $X = wv\partial_w$ , $Y = w^2v^2w\partial_v + \partial_w$

**Çözüm:** Levi-Civita koneksiyonunun baz vektörlerinde aldığı değerleri daha önce hesapladık ve bunlar

$$\nabla_{\partial_u}\partial_u = \frac{u}{u^2+v^2}\partial_u - \frac{v}{u^2+v^2}\partial_v, \quad \nabla_{\partial_u}\partial_v = \frac{v}{u^2+v^2}\partial_u + \frac{u}{u^2+v^2}\partial_v, \quad \nabla_{\partial_u}\partial_w = \frac{1}{u}\partial_w$$

$$\nabla_{\partial_v}\partial_u = \frac{v}{u^2+v^2}\partial_u + \frac{u}{u^2+v^2}\partial_v, \quad \nabla_{\partial_v}\partial_v = -\frac{u}{u^2+v^2}\partial_u + \frac{v}{u^2+v^2}\partial_v, \quad \nabla_{\partial_v}\partial_w = \frac{1}{v}\partial_w$$

$$\nabla_{\partial_w}\partial_u = \frac{1}{u}\partial_w, \quad \nabla_{\partial_w}\partial_v = \frac{1}{v}\partial_w, \quad \nabla_{\partial_w}\partial_w = -\frac{uv^2}{u^2+v^2}\partial_u - \frac{u^2v}{u^2+v^2}\partial_v$$

dir.

a. $X = u^2\partial_u + v^3\partial_v + \partial_w$ ,$Y = uv^2\partial_u + u^2v^2\partial_v$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_{u^2\partial_u + v^3\partial_v + \partial_w} Y \\
&= u^2\nabla_{\partial u} Y + v^3\nabla_{\partial v} Y + \nabla_{\partial_w} Y \\
&= u^2\nabla_{\partial u}(uv^2\partial_u + u^2v^2\partial_v) + v^3\nabla_{\partial v}(uv^2\partial_u + u^2v^2\partial_v) + \nabla_{\partial_w}(uv^2\partial_u + u^2v^2\partial_v) \\
&= u^2\Big(\partial_u[uv^2]\partial_u + uv^2\nabla_{\partial_u}\partial_u + \partial_u[u^2v^2]\partial_v + u^2v^2\nabla_{\partial_u}\partial_v\Big) \\
&\quad +v^3\Big(\partial_v[uv^2]\partial_u + uv^2\nabla_{\partial_v}\partial_u + \partial_v[u^2v^2]\partial_v + u^2v^2\nabla_{\partial_v}\partial_v\Big) \\
&\quad +(\partial_w[uv^2]\partial_u + u\theta^2\nabla_{\partial_u}\partial_u + \partial_w[u^2v^2]\partial_v + u^2v^2\nabla_{\partial_w}\partial_v) \\
&= u^2v^2\partial_u + u^3v^2(\frac{u}{u^2+v^2}\partial_u - \frac{v}{u^2+v^2}\partial_v) + 2u^3v^2\partial_v + u^4v^2(\frac{v}{u^2+v^2}\partial_u + \frac{u}{u^2+v^2}\partial_v) \\
&\quad +v^3 2uv\partial_u + uv^5(\frac{v}{u^2+v^2}\partial_u + \frac{u}{u^2+v^2}\partial_v) + 2u^2v^4\partial_v + u^2v^5(-\frac{u}{u^2+v^2}\partial_u + \frac{v}{u^2+v^2}\partial_v) \\
&\quad +uv^2(\frac{u}{u^2+v^2}\partial_u - \frac{v}{u^2+v^2}\partial_v) + \frac{u^2v^2}{v}\partial_w \\
&= (\frac{u^4v^2 + u^4v^3 + uv^6 - u^3v^5}{u^2+v^2} + u^2v^2 + 2v^4u)\partial_u \\
&+ (\frac{-u^3v^3 + u^5v^2 + u^2v^5 + u^2v^6}{u^2+v^2} + 2u^3v^2 + 2u^2v^4)\partial_v + u^2v\partial_w
\end{aligned}$$

## 4.6 Mathematica da Metrik Tensör, Christoffel Sembolleri, Levi-Civita Koneksiyon ve Eğrilik Tensör Alanının Hesaplanması

*Bu bölümde Mathematica programında kendi yazdığımız kodlara göre bir Riemann manifoldunun metrik bileşenleri, Christoffel sembolleri, Levi-Civita koneksiyonunun baz vektörlerde aldığı değerleri ve eğrilik tensörünün bileşenlerinin hesaplanmasını öğreneceğiz.*

Verilen parametrizasyonlar uzun veya karmaşık olduğunda metriğin bileşenleri, Chistoffel sembolleri, kovaryant türevin baz vektörlerin de aldığı değerler ve eğrilik tensör bileşenlerinin hesaplanması zor olacaktır. Bunun için aşağıdaki komut satırlarının tamamını bir kere Mathematica'ya yazarak tüm bu ifadeleri kolayca hesaplayabiliriz.

Clear["Global`*"]

değişkenler = { } *Buradaki parantez içine parametrizasyonun değişkenleri, arasında virgül olacak şekilde yazılacak.*

$\Psi[u\_, v\_] := \{\ \}$ *Buradaki parantez içine parametrizasyonun bileşenleri, arasında virgül olacak şekilde yazılacaktır.*

$n = \text{Length}[\text{değişkenler}]$

$Do[u_i = \text{değiskenler}[[i]], \{i, 1, n\}]$

$g[i\_, j\_] := \text{FullSimplify}\left[\partial_{u_i}\Psi[u, v].\partial_{u_j}\Psi[u, v]\right]$

$\text{A} = \text{FullSimplify}[\text{Table}[\text{Table}[g[i, j], \{i, 1, n\}], \{j, 1, n\}]]$

$\text{B} = \text{FullSimplify}[\text{Inverse}[A]]$

$$\Gamma[i\_, j\_, k\_] := \text{FullSimplify}\left[\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} \text{B}[[m]][[k]]\left(\partial_{u_i}g[j, m] + \partial_{u_j}g[m, i] - \partial_{u_m}g[i, j]\right)\right]$$

$$\text{Y}[k\_, l\_] := \sum_{m=1}^{n} \Gamma[k, l, m] * "\partial"_{u_m}$$

$$\text{R}[j\_, k\_, l\_, i\_] := \text{FullSimplify}\left[\partial_{u_k}\Gamma[l, j, i] - \partial_{u_l}\Gamma[k, j, i] + \sum_{m=1}^{n}(\Gamma[k, m, i] * \Gamma[l, j, m] - \Gamma[k, j, m] * \Gamma[l, m, i])\right]$$

$\text{Do}\left[\text{Print}\left[\text{Style}\left["\partial"_{u_i}, " = ", \text{Large}\right], \text{Style}[" = ", \text{Large}],\right.\right.$
$\left.\left.\text{Style}\left[\text{FullSimplify}\left[\partial_{u_i}\psi[u, v]\right], \text{Large}\right]\right], \{i, 1, n\}\right]$

$\text{Print}\left[\text{Style}\left["\left[g_{ij}\right] = ", \text{Large}\right], \text{Style}[\text{A} //\text{MatrixForm,Large}]\right]$

$\text{Print}\left[\text{Style}\left["\left[g^{ij}\right] = ", \text{Large}\right], \text{Style}[\text{B} //\text{MatrixForm,Large}]\right]$

# 5. Riemann Manifoldu Üzerinde Eğriler

## 5.1 Riemann Manifold Üzerinde Yay Uzunluğu

*İstanbul'dan uçakla aktarmasız olarak New York (veya Tokyo, Mekke, Medine vb.) şehrine gideceğiz. Bu iki şehir arasındaki uzaklık ne kadardır? Uçağın rotasını bir eğri olarak göz önüne alırsak rotanın başlangıç ve bitim noktası rotanın yani eğrinin o noktalar arasındaki uzunluğudur. Peki bu uçakla giderken İstanbul'dan rotanın üzerinde geçtiği herhangi bir şehrin İstanbul'a uzaklığı ne kadardır? O zaman da eğrinin iki noktası arasında kalan eğri parçasının uzunluğunun bulunması gerekir.*

**Tanım 5.1** $(M,g)$ bir Riemann manifoldu ve $\alpha : I = ([a,b]) \to M$ bir eğri olsun. Eğrinin hız vektörü $\alpha'(t)$ olmak üzere

$$\| \alpha'(t) \| = \sqrt{g(\alpha'(t), \alpha'(t))}$$

sayı ifadesine hız vektörünün **normu (veya boyu)** denir. Burada ise $([a,b])$ kapalı aralığını içine alan açık aralık gösterilmektedir.

**Tanım 5.2** $(M,g)$ bir Riemann manifoldu ve $\alpha : I = ([a,b]) \subset \mathbb{R} \to M$ bir eğri olsun. Eğrinin hız vektörü $\alpha'(t)$ olmak üzere

$$l = \int_a^b \| \alpha'(u) \| \, du$$

sayısına $M$ manifoldun da $\alpha(I)$ veya kısaca $\alpha$ eğrisinin **yay uzunluğu** denir.

$t \in [a,b]$ için $\alpha$ eğrisinin $[a,t]$ aralığına kısıtlanmış yay uzunluğu $s(t)$ olsun. Bu olarak alalım. O zaman

$$II(U,V) = acl + (ad+bc)m + bdn = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

dir.

$$[II(U,V)] = \begin{bmatrix} acl & (ad+bc)m \\ (ad+bc)m & bdn \end{bmatrix}$$

dir. İkinci temel form lineer olduğundan bir matris karşılık gelir ve bu karşılık gelen matris

$$[II] = \begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} <\Phi_{uu}, N> & <\Phi_{uv}, N> \\ <\Phi_{vu}, N> & <\Phi_{vv}, N> \end{bmatrix}$$

dir.

**Teorem 7.8** $M$ regüler yüzeyinin şekil operatörüne karşılık gelen matris

$$I^{-1}II = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix}$$

dir.

**İspat:**

$$S(\Phi_u) = a_{11}\Phi_u + a_{21}\Phi_v$$
$$S(\Phi_v) = a_{12}\Phi_u + a_{22}\Phi_v$$

olmak üzere şekil operatörüne karşılık gelen matris

$$\mathscr{S} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

olsun. Böylece

$$<S(\Phi_u), \Phi_u> = a_{11} <\Phi_u, \Phi_u> + a_{21} <\Phi_v, \Phi_u>$$
$$<S(\Phi_u), \Phi_v> = a_{11} <\Phi_u, \Phi_v> + a_{21} <\Phi_v, \Phi_v>$$
$$<S(\Phi_v), \Phi_u> = a_{12} <\Phi_u, \Phi_u> + a_{22} <\Phi_v, \Phi_u>$$
$$<S(\Phi_v), \Phi_v> = a_{12} <\Phi_u, \Phi_v> + a_{22} <\Phi_v, \Phi_v>$$

dir. Yani

$$l = Ea_{11} + Fa_{21}$$
$$m = Fa_{11} + Ga_{21}$$
$$m = Ea_{12} + Fa_{22}$$
$$n = Fa_{12} + Ga_{22}$$

## 7.9 Mathematica Programında Parametrizasyonu Verilen Yüzeylerin Temel Formlar, Şekil Operatörü, Gauss ve Ortalama Eğriliklerin Hesaplanması

*Bu bölümde $\mathbb{R}^3$ teki yüzeylerin Mathematica programında bizim yazdığımız kodlara göre birinci, ikinci temel formları, şekil operatörü, Gauss eğriliği, ortalama eğrilik, asli vektörler ve asli eğriliklerini hesaplayacağız.*

Verilen parametrizasyon karmaşık yada uzun olduğu zaman parametrizasyonun birinci temel formuna karşılık gelen matrisini, ikinci temel formuna karşılık gelen matrisini, şekil operatörüne karşılık gelen matrisini, Gauss ve ortalama eğriliğini bulmak karmaşık ve uzun olacaktır. Aşağıdaki Mathematica kodlarını bir kez Mathematica'ya tanımlatarak parametrizasyonun birinci temel formuna karşılık gelen matrisi, ikinci temel formuna karşılık gelen matrisi, şekil operatörüne karşılık gelen matrisi, Gauss, ortalama eğriliğini, asli eğrilik ve asli vektörlerini kolaylıkla bulabiliriz.

değişkenler = { }Buradaki parantez içine parametrizasyonun değişkenleri, arasında virgül olacak şekilde yazılacak.

$\psi[u_, v_] := \{\ \}$Buradaki parantez içine parametrizasyonun bileşenleri, arasında virgül olacak şekilde yazılacaktır.

Do $[u_i =$ değişkenler $[[i]], \{i, 1, 2\}]$

$g[i\_, j\_] := \text{FullSimplify}\left[\partial_{u_i}\psi[u,v].\partial_{u_j}\psi[u,v]\right]$

$\text{A} = \text{FullSimplify}[\text{Table}[\text{Table}[g[i,j],\{i,1,2\}],\{j,1,2\}]];$

$$l = \text{FullSimplify}\left[\frac{\text{Det}\left[\left\{\partial_{\text{u}_1,\text{u}_1}\psi[\text{u},\text{v}], \partial_{\text{u}_1}\psi[\text{u},\text{v}], \partial_{\text{u}_2}\psi[\text{u},\text{v}]\right\}\right]}{\sqrt{\text{g}[1,1] * \text{g}[2,2] - \text{g}[1,2]^2}}\right];$$

$$m = \text{FullSimplify}\left[\frac{\text{Det}\left[\left\{\partial_{\text{u}_1,\text{u}_2}\psi[\text{u},\text{v}], \partial_{\text{u}_1}\psi[\text{u},\text{v}], \partial_{\text{u}_2}\psi[\text{u},\text{v}]\right\}\right]}{\sqrt{\text{g}[1,1] * \text{g}[2,2] - \text{g}[1,2]^2}}\right];$$

$$n = \text{FullSimplify}\left[\frac{\text{Det}\left[\left\{\partial_{u_2,u_2}\psi[u,v], \partial_{u_1}\psi[u,v], \partial_{u_2}\psi[u,v]\right\}\right]}{\sqrt{g[1,1] * g[2,2] - g[1,2]^2}}\right];$$

Print [Style ["Birinci temel forma karşılık gelen matris;", Blue, Large]]

Print [Style [" [I] = ", Large], Style [A // MatrixForm, Large]]

Print [Style ["İkinci temel forma karşılık gelen matris;", Blue, Large]]

Print [Style [" [II] = ", Large], Style [{{$l$, $m$}, {$m$, $n$}}// MatrixForm, Large]]

Print [Style ["Şekil operatörüne karşılık gelen matris;", Blue, Large]]

# DİFERENSİYEL GEOMETRİ VE MATHEMATICA UYGULAMALARI

Diferensiyel Geometri, matematik bölümlerinin en önemli temel derslerinden biridir. Diferensiyel Geometri dersleri lisans ve lisansüstü seviyesinde üniversitelerde okutulmaktadır. Kitapta, diferensiyel geometrinin üç temel başlığı olan; manifoldlar, eğriler ve yüzeyleri detaylı bir şekilde ele alınmaktadır. Kitapta modernleşen bilimsel yaklaşımlar doğrultusunda bilgisayar programı olan Mathematica hazır paket program kullanılmaktadır. Diferensiyel Geometrideki hesaplamalar, Mathematica hazır paket programında yazdığımız kodlar sayesinde hızlı bir şekilde elde edilmektedir. Mathematica da yazılan kodların çözümlü örnekleri kitapta mevcuttur. Çözümlü örneklerle yapılan bu çalışmalar sadece öğrencilere yönelik değil aynı zaman da bilimsel araştırma yapmak isteyen akademisyenlere de faydalı olacaktır.

Kitap, uzun yıllar Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde lisans ve lisansüstü düzeyde okuttuğum Diferensiyel Geometri ders notlarının kitaba bürünmüş halidir. Kitap üniversitelerimizin Matematik Bölümleri, Matematik Mühendisliği Bölümleri, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümlerin de lisans ve lisansüstünde verilen Diferensiyel Geometri dersleri için faydalı bir kaynak olacaktır. Ayrıca, kitap da Diferensiyel Geometrinin Mathematica hazır paket uygulamalarına yer verilmesi nedeniyle üniversitelerimizin Mühendislik Fakültelerindeki Makine, Jeoloji, Fotogrametri, Havacılık ve Uçak Mühendislik gibi bölümleri de kitaptan faydalanabilecektir.

Kitabın faydalı olması dileklerimle.

Prof. Dr. Aysel TURGUT VANLI