

## ÖNERME TANIMI ÜZERİNE

Matematiksel tanımlar mümkün olduğu kadar “kendi kendine referans” verilmeden yapılmalı. Bu doğrultuda, bu not, önerme tanımı konusuna dikkat çekmek amacıyla yapılmıştır.

$L$ , en az bir sembolü olan bir semboller topluluğu ve her  $n$  doğal sayısı için  $\bar{n}$ ,  $\{1, 2, \dots, n\}$  kümesini göstermek üzere, bir  $f : \bar{n} \rightarrow L$  fonksiyona **L-sözcük** ve  $n$ 'ye bu **sözcüğün uzunluğu** denir.  $L$ -sözcüklerin topluluğu  $sozcuk(L)$  ile gösterilsin.

$\mathcal{T}$ , en az bir sembolü olan ve  $(, \neg, \rightarrow, )$  sembollerini içermeyen bir semboller topluluğu olsun. Elemanları sadece ve sadece  $\mathcal{T}$ 'nin elemanları ve  $(, \neg, \rightarrow, )$  sembollerinden oluşan topluluğu  $\mathcal{A}$  ile gösterelim. Yani,

$$\mathcal{A} = \{ (, \neg, \rightarrow, ) \} \cup \mathcal{T}$$

olsun.  $\mathcal{L}$ 'ye **temel önermeleri** sadece ve sadece  $\mathcal{T}$ 'nin elemanları olan **önerme alfabesi** diyelim. Bu biçimde verilen  $\mathcal{L}$  temel alınarak, Türkiye'de yaygın olarak bilinen ve kullanılan Ali Nesin'in *Önermeler Mantığı* (2009 basımı) kitabında **önerme** şu biçimde tanımlanmaktadır:

**Tanım 0.1.** *Bir önerme aşağıdaki gibi tanımlanır.*

- i. *Her temel önerme bir önermedir.*
- ii. *Eğer  $p$  bir önermeyse,  $(\neg p)$  de bir önermedir.*
- iii. *Eğer  $p$  ve  $q$  birer önermeyse,  $(p \rightarrow q)$  de bir önermedir.*
- iv. *Her önerme, önermeler mantığının bir sözcüğüdür ve önermeler mantığının bir sözcüğü ancak ve ancak yukarıdaki kurallar sonlu defa uygulanarak elde edilmişse bir önermedir<sup>1</sup>.*

Bu tanım altında tanımlanan önermeler topluluğunu  $onerme(\mathcal{L})$  ile gösterelim. Kendine referans verilerek tanımlan bu tanım doğrudan da verilebilir. Öncelikle şu tanımı verelim.

**Tanım 0.2.** *Her temel önermeyi içeren ve  $p, q \in \mathcal{A}$  için  $(\neg p)$  ve  $(p \rightarrow q) \in \mathcal{A}$  olan  $sozcuk(\mathcal{L})$ 'nin bir alt topluluğu olan  $\mathcal{A}$ 'ya bir **önermeleri kapsayan topluluk** denir.*

$sozcuk(\mathcal{L})$ , bir önermeleri kapsayan topluluktur. Dolayısıyla, kanıtı kolay olan aşağıdaki teorem verilebilir.

<sup>1</sup>Burada  $(\neg p$  ve  $(p \rightarrow q)$  fonksiyonlarının nasıl tanımlandığını okurun tahmin ettiğini varsayıyoruz.

**Teorem 0.3.** *Önermeyi kapsayan toplulukların arakesiti de bir önermeyi kapsayan topluluktur.*

Bu teoremden arakesit terimiyle tanımlı önermeyi kapsayan topluluk (**\*onerme**( $\mathcal{L}$ ) ile gösterilsin) her önermeyi kapsayan topluluk tarafından kapsanır. Ayrıca:

**Teorem 0.4.**  $onerme(\mathcal{L}) = *onerme(\mathcal{L})$ .

Böylece, önermenin tanımı “kendine referans” vermeden tanımlanmış olur.

Bunun yanında, *Önermeler Mantığı* kitabının 33. sayfasında verilen “uzunluk tanımı” bir teorem olarak verilmeli, diğer durumda “her önermenin bir uzunluğu vardır”ın kanıtlanması gerekiyor!