

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(DOKTORA TEZİ)

**NONLİNEER PROBLEMLERİN
NON-PERTURBATİF YÖNTEMLERLE
ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE**

Ahmet YILDIRIM

Matematik Anabilim Dalı
Bilim Dalı Kodu: 403.06.01

Sunuş Tarihi: 12.01.2009

Tez Danışmanı: Prof.Dr.Turgut ÖZİŞ

Bornova-İZMİR

Ahmet YILDIRIM tarafından Doktora tezi olarak sunulan “**Nonlinear Problemlerin Non-Perturbatif Yöntemlerle Çözümleri Üzerine**” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve **12.01.2009** tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri**İmza**

Jüri Başkanı	: Prof.Dr.Turgut ÖZİŞ
RaportörÜye	: Doç.Dr.Emine MISIRLI
Üye	: Prof.Dr.Şennur SOMALI
Üye	: Prof.Dr.Necdet BİLDİK
Üye	: Yrd.Doç.Dr.Fadime Dal

ÖZET**NONLİNEER PROBLEMLERİN
NON-PERTURBATİF YÖNTEMLERLE
ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE**

YILDIRIM, Ahmet
Doktora Tezi, Matematik Bölümü
Tez Yöneticisi : Prof.Dr.Turgut ÖZİŞ
Ocak 2009, 231 sayfa

Genellikle matematik, mühendislik, fizik ve diğer bilim dalları için nonlinear problemlerin yaklaşık kapalı çözümlerine sahip olmak çok yararlıdır. Bu durumlarda genel olarak çeşitli perturbasyon metotları kullanılır, ama sonuçlar nonlinearlik derecesi arttıkça bozulmaya başlar. Eğer gerçekten fiziksel işlemlerin analitik formülasyonları isteniyor ise klasik perturbasyon yöntemlerine bazı matematiksel yaklaşımlar katmalıyız. Bu tezde, modifiye Lindstedt-Poincare metodu, homotopi perturbasyon metodu ve diğer modifiye perturbasyon metotları olarak bilinen yeni analitik metotlar sunduk. Sunulan tüm metotlar sadece zayıf nonlinear problemler için değil, aynı zamanda güçlü nonlinear problemlerde de geçerli olmuştur ve elde edilen çözümler tüm çözüm bölgesinde geçerlidir.

Anahtar sözcükler: Modifiye Lindstedt-Poincare Metodu, Homotopi Perturbasyon Metodu, Taylor Serileri, Pade Yaklaşımı, Üstel Pade Yaklaşımı, Nonlinear Salınımlar

ABSTRACT**ON SOLUTIONS OF NONLINEAR PROBLEMS
WITH NON-PERTURBATIVE METHODS**

YILDIRIM, Ahmet
PhD Thesis, Mathematics Department
Supervisor: Prof.Dr. Turgut ÖZİŞ
January 2009, 231 pages

It is often useful to mathematics, engineering, physics and others to have an approximate closed form solution to describe the nonlinear problems. Various perturbation methods are widely used for this purpose, but results often deteriorate as the degree of nonlinearity increases. Consequently, if we are really determined to extract meaning from analytic formulations of physical processes, we must resort to amelioration of the classical perturbation methods using mathematical tools. In this thesis, we proposed some new analytical methods, e.g., modified Lindstedt-Poincare methods, homotopy perturbation method and other modified perturbation methods. All the proposed methods are valid for not only weakly nonlinear equations, but also for strongly ones, and the obtained solutions are valid for the whole solution domain.

Key words: Modified Lindstedt-Poincare Methods, Homotopy Perturbation Method, Taylor Series, Pade Approximant, Exponential Pade Approximant, Nonlinear Oscillators

TEŞEKKÜR

Bu alıŐma sűresince deęerli gűrűŐlerinden faydalandıęım, yakın ilgisini esirgemeyen ve her konuda destek olan hocam sayın Prof. Dr. Turgut ŐZİŐ 'e (Ege Őniversitesi) teŐekkűrlerimi sunarım.

ÇalıŐmalarım sűresince ve hayatımın her anında yanımda olduęu için ve ayrıca bana gűsterdięi sevgi, sadakat, destek ve hoŐęűrű dolayısıyla biricik eŐim Nilűfer YILDIRIM 'a sonsuz sevgilerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET	v
ABSTRACT	vii
TEŞEKKÜR.....	ix
1.GİRİŞ.....	1
1.1. Straightforward Açılım.....	3
1.2. Nonlinear Newton-Raphson İterasyon Metodu.....	12
1.3. Homotopi Perturbasyon Metodu.....	22
1.4. Perturbasyon Metodunun İlerisi.....	27
1.5. Çok Eski Çin Metodu.....	32
1.6. Periyodik Çözümler.....	36
2.PERTURBASYON METODLARINA KISA BİR GİRİŞ.....	43
2.1. Perturbasyon Metodu İle Neptün Ve Platon'un Keşfi.....	43
2.2. Lindstedt-Poincaré Metodu.....	44
2.3. Modifiye Lindstedt-Poincare Metodu: Bir sabitin açılımı.....	47
2.4. Modifiye Lindstedt-Poincare Metodu : Bir yeni dönüşüm.....	58
2.5. Modifiye Lindsted Poincare' Metodu: İkili Seri Açılımı.....	65
2.6. Taylor Serisi Dönüşümü, Padé Yaklaşımı ve	

Üstel Padé Yaklaşımı.....	72
2.7.Modifiye Shohat Açılımı.....	85
2.8. Çok Zamanlı Açılımlar.....	89
2.9.Modifiye Çok Zamanlı Açılımlar.....	95
2.10.Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky Metodu.....	103
2.11.Averaj Metodu Üzerine.....	108
3. HOMOTOPİ PERTURBASYON METODU.....	115
3.1.Giriş.....	115
3.2. Homotopi Perturbasyon Metodu.....	123
3.3. Blasius Denklemi.....	159
3.4.Homotopi Perturbasyon Metodu ve Varyasyonel Metodu Çift Metodu.....	167
3.5.Thomas-Fermi Denklemleri.....	173
3.6.Bifurkasyon.....	177
3.7. Dalga Denklemleri.....	180
3.8. Jakobi Eliptik Denklemlerinin Periyodik çözümü.....	195
3.9. Bimoleküler Reaksiyon.....	198
3.10. İki Nokta sınır-değer problemleri.....	202
3.11. Güçlü Nonlinear Salınımlar.....	206
4.SONUÇ.....	219
KAYNAKLAR DİZİNİ	220
ÖZGEÇMİŞ.....	231

1.GİRİŞ

Nonlinear bilimdeki hızlı gelişme ile son yirmi yılda, bilim adamları ve mühendisler, nonlinear problemler için analitik asimtotik tekniklerle daha fazla ilgilenmeye başlamışlardır. Günümüzde, bilgisayar yardımı ile lineer sistemlerin çözümlerini bulmak çok kolay olsa da, nonlinear problemleri nümerik veya teorik olarak çözmek hala çok zordur. Nonlinear problemlerin nümerik çözümlerini bulmak için, çeşitli yöntemler ve nümerik simülasyonlar iterasyon teknikleri uygulanmaktadır ve hemen hemen bütün iteratif metodlar başlangıç çözümlerine duyarlıdır. Bu nedenle güçlü bir nonlinearlik durumunda yakınsak sonuçlar bulmak çok zordur. Bunlara ek olarak, en önemlisi, başlangıç koşullarına dayanan nonlinear salınımın doğal dairesel frekansı (örneğin; salınımın genliği) gibi bilgiler nümerik simülasyon işlemi sırasında kaybolacaktır. Örneğin, nümerik metodlar iyi bilinen Burgers denklemini [1] herhangi bir η değeri için kolayca çözebilir.

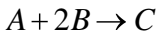
$$u_t + uu_x = \eta u_{xx} , \quad (1.0.1)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 , \quad t > 0, \quad (1.0.2)$$

$$u(x,0) = \sin 2\pi x , \quad x \in [0,1] . \quad (1.0.3)$$

Fakat nümerik çözüm, mühendislikte esas rol oynayan dalga hızı ve frekansı arasındaki dağınık ilişkiyi veremeyebilir. Fizik ve biyolojide daha fazla öneme sahip olan modern matematiğe ait analitik yöntemler, modern matematiğin olduğu gibi, klasik veya çok eski matematiğin de, gerçek hayattaki çeşitli nonlinear fizik problemleri için yaklaşık analitik çözümün araştırılması alanındaki uygulamalarına olan ilginin artmasına yardımcı olmaktadır.

Bilgisayar, belirli problemler için yaklaşık çözümü teorik olarak araştırabilme ve elde edilen bir dizi çözümün çeşitli özelliklerini sıralayabilme ihtimalini artırmaktadır. Aynı zamanda, bilgisayar çok büyük hesaplamaları yapmak için ve sonuç bilgilerinin işlem verilerini elde etmek için de kullanılabilir. Bilgisayar biliminin çok hızlı büyümesine ve nümerik simülasyonun her alanda uygulanmasına rağmen, nümerik olmayan çıkarımlar hala çok önemlidir. Gerçek hayattaki fiziksel anlayışın anahtarı “yaklaşım” kullanmaktır. Günümüzde, mühendislerin, fizikçilerin ve uygulamalı matematikçilerin karşılaştığı fizik problemleri, tam analitik çözümlere meydan vermeyen belirli özellikler sergilemektedir. Değişkeninde karmaşık ve alışılmamış fonksiyonlar bulunduran tam çözüm kesin olarak bulunabilse de, bu matematiksel ve fiziksel yorum veya nümerik değerlendirme için kullanışsız olabilir. Bunun tersine, yaklaşık çözümler, tüm bilim adamları ve mühendisler tarafından bilinen fiziksel değişkenler arasındaki zorunlu ilişkiyi göstermek için, mevcut detayları parçalayabilir. Bir gösterim olarak , kimyasal tepkime için matematiksel model olarak kullanılabilen denklem göz önüne alınsın:



$t = 0$ da, A ve B moleküllerinin sayıları sırasıyla a ve b , ve herhangi bir t anında C nin sayısının da c olduğu kabul edilerek, denklem şu biçimde yazılabilir:

$$\frac{dn}{dt} = K(a - n)(b - 2n)^2. \quad (1.0.4)$$

Bu denklemin tam çözümü şu şekildedir [2]:

$$t = \frac{1}{K} \left\{ \frac{1}{2a-b} \left(\frac{1}{b-2n} - \frac{1}{b} \right) + \frac{2}{(2a-b)^2} \ln \left(\frac{1-2n/b}{1-n/a} \right) \right\} \quad (1.0.5)$$

Bu ifade, tepkimeyle ilgili olan, “ n 'nin t 'ye karşı olan eğrisi nasıldır?” veya “denklemdaki a , b , ve K sabitlerine bağlı bu eğrinin şekli nasıldır?” gibi en basit sorulara doğrudan bir cevap vermek için çok karışıktır. Bunun tersine;

$$\beta = Kab \left(1 - \frac{1}{4a} \right), \quad (1.0.6)$$

eşitliğinin varlığında, yaklaşık çözüm bu sorulara şu şekilde doğrudan cevap verir:

$$n \approx \frac{1}{2} b (1 - e^{-\beta t}). \quad (1.0.7)$$

(1.0.7) çözümü şunu anlatır: “(1.0.6) formülünde verilen zaman sabiti ile n , $t=0$ noktasında, sıfırdan başlayarak üstel bir yaklaşımla $n=b/2$ son değerine kadar artar”. [2]

Bu bölümde, basit ve kullanışlı bazı analitik metodları kısaca özetleyeceğiz.

1.1. Straightforward Açılım

Perturbasyon metodları [3,4], mühendislik problemlerinin nonlineer analizinde mevcut olan çok kullanışlı yöntemleri tedarik eder. Bu yöntemler düzenli bir şekilde gelişmekte ve daha karışık problemlere uygulanmaktadır. Bu bölümde, straightforward açılım metodunu ele alacağız. Modifiye edilmiş bir straightforward açılım, He tarafından [5] te ileri sürülmüştür.

Yöntemin teknik durumuna bir örnek olarak, aşağıdaki cebirsel denklem göz önüne alınsın:

$$x^2 + \varepsilon x - 1 = 0 \quad . \quad (1.1.1)$$

Bu denklemde ε çok küçüktür ($0 < \varepsilon \ll 1$). Bu denklemin tam çözümü kolaylıkla şu şekilde bulunabilir :

$$x = \frac{-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2} \quad . \quad (1.1.2)$$

$\varepsilon = 0$ olması durumunda,

$$x^2 - 1 = 0 \quad (1.1.3)$$

“perturbe edilemeyen” denklemi bulunur:

Perturbe edilemeyen denklemin kökleri ise:

$$x_0 = \pm 1 \quad (1.1.4)$$

şeklindedir.

(1.1.1) esas denkleminin kökleri, $x_0 = \pm 1$ köklerinden çok farklı olmamalıdır. Böyle bir yerine koyma hatası, εx teriminin atılmasından kaynaklanır. Çözümü daha doğru bulabilmek için, şu şekilde seriye açarız:

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \quad . \quad (1.1.5)$$

Bu ifadeyi, perturbasyon denklemi olan (1.1.1) denkleminde yerine koyarak ve aynı kuvvete sahip ε 'ların katsayılarını eşitleyerek:

$$\varepsilon^0 \text{ 'in katsayıları : } x_0^2 - 1 = 0 \text{ ,} \quad (1.1.6)$$

$$\varepsilon^1 \text{ 'in katsayıları: } 2x_0x_1 + x_0 = 0 \text{ ,} \quad (1.1.7)$$

$$\varepsilon^2 \text{ 'nin katsayıları: } x_1^2 + 2x_0x_2 + x_1 = 0. \quad (1.1.8)$$

denklemleri bulunur.

x_n 'in çözümleri şu şekilde bulunur: $x_0 = \pm 1$, $x_1 = -1/2$ ve $x_2 = \pm 1/8$.

Buradan

$$x = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \dots \text{ ,} \quad (1.1.9)$$

$$\text{ve} \quad x = -1 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \dots \text{ .} \quad (1.1.10)$$

yaklaşık çözümleri elde edilir.

$\varepsilon = 0.1$ olması durumunda, perturbasyon çözümleri $x = 0.95125$ ve $x = -1.05125$ iken, tam çözümler $x_{\varepsilon x} = 0.95124922$ ve $x_{\varepsilon x} = -1.05124922$ 'dir. Küçük ε değerleri için perturbasyon çözümlerinin doğruluk oranının yüksek olduğu açıktır, fakat ε değeri büyüdükçe sonuç hızlı bir şekilde bozulur. Şimdi, küçük ε için cebirsel denklemin [3] çözümünü ele alalım:

$$u = 1 + \varepsilon u^2 \text{ .} \quad (1.1.11)$$

Bu durumda sistem küçük bir perturbasyonu kabul eder: εu^2 ifadesine “perturbasyon terimi” veya “nonlinear küçük terim”, ve ε ' a da “küçük parametre” denir. (Eğer $\varepsilon = 0$, $u_0 = 1$ ise.) Sıfırdan farklı küçük ε için, (1.1.11)'in

çözümü her ne kadar sade bir biçimde yazılamazsa da, $u_0=1$ 'den daha farklı olamaz. Küçük ε için, (1.1.11)'in çözümünün, ε 'un kuvvetleri biçiminde şu şekilde ifade edilebileceğini kabul edelim:

$$u = 1 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (1.1.12)$$

Bu ifadeyi (1.1.11)'de yerine koyarsak şu sonuç elde edilir:

$$\varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots = \varepsilon(1 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots)^2. \quad (1.1.13)$$

Küçük ε için genişleterek, (1.1.13)'ü şu şekilde tekrar yazarız:

$$\varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots = \varepsilon + 2\varepsilon^2 u_1 + \varepsilon^3(2u_2 + u_1^2) + \dots \quad (1.1.14)$$

ε 'ların derecelerine göre katsayılarını önlerine yazarak, şu denklemi elde ederiz:

$$\varepsilon(u_1 - 1) + \varepsilon^2(u_2 - 2u_1) + \varepsilon^3(u_3 - 2u_2 - u_1^2) + \dots = 0. \quad (1.1.15)$$

Bu denklem ε 'a bağlı olduğundan, her ε 'un katsayısı sıfıra eşitlenir:

$$u_1 - 1 = 0, \quad (1.1.16)$$

$$u_2 - 2u_1 = 0, \quad (1.1.17)$$

$$u_3 - 2u_2 - u_1^2 = 0. \quad (1.1.18)$$

u_1, u_2, u_3 çözümleri şu şekilde bulunur:

$$u_1 = 1, \quad (1.1.19)$$

$$u_2 = 2u_1 = 2, \quad (1.1.20)$$

$$u_3 = 2u_2 + u_1^2 = 5. \quad (1.1.21)$$

Böylece yaklaşık çözüm şu şekilde edilir:

$$u = 1 + \varepsilon + 2\varepsilon^2 + 5\varepsilon^3 + \dots . \quad (1.1.22)$$

Düzeltilmelere hiçbir zorlukla karşılaşmadan devam edilebilirdi, fakat ε 'un değerinin artmasıyla, tam çözümden önemli miktarda sapma olması kaçınılmaz olacaktır. Bu nedenle ε 'un büyük değerleri için perturbasyon metodları yetersiz kalır.

Perturbasyon metodları, zayıf nonlinear problemler için etkili yöntemlerdir, fakat güçlü nonlinear problemlerin analizinde etkisiz kalabilirler.

Başlangıç koşulları:

$$u(0) = A, \quad u'(0) = 0 \quad (1.1.23)$$

olan, aşağıdaki nonlinear oskülatörü göz önüne alalım:

$$u'' + u + \varepsilon f(u) = 0 . \quad (1.1.24)$$

Alışılmış perturbasyon metodları için, ε parametresi küçük kabul edilir. ($0 < \varepsilon \ll 1$).

Perturbasyon metodlarının esas amacı, ε 'dan bağımsız katsayılar ile ε ' a göre kuvvet serisi olan:

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots , \quad (1.1.25)$$

biçimindeki (1.1.24)'ün çözümünü aramaktır. (1.1.24) denkleminde $\varepsilon = 0$ alınarak elde edilen

$$u'' + u = 0, \quad (1.1.26)$$

perturbe edilemeyen denklemin çözümünün, ilk terim olan u_0 olduğu görülür. Bu, sadece $\varepsilon \rightarrow 0$ veya $\varepsilon \ll 1$ durumunda, u_0 'ın (1.1.24)'ün yaklaşık çözümü olarak düşünülebileceği anlamına gelir. (1.1.25)'in ikinci terimi olan εu_1 'in, baş terim u_0 'dan yararlanılarak ve $\varepsilon^2 u_2$ 'nin de birinci dereceden yaklaşım olan $u_0 + \varepsilon u_1$ 'den yararlanılarak bulunduğunu hatırlayalım. Böylelikle bulunan sonuçlar sadece $\varepsilon \ll 1$ durumunda geçerlidir. Yukarıda kısaca belirtilen olumsuzluklardan kurtulmak için, ilerideki bölümlerde bazı yeni asimtotik metodları tanıtacağız. Perturbasyon metodlarının esas amacını açıklamak için, oskilatörü göz önünde bulunduralım. Örneğin,

$$u(0) = A, \quad u'(0) = 0, \quad (1.1.27)$$

başlangıç koşulları altındaki:

$$u'' + (1 + \varepsilon)u = 0, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (1.1.28)$$

denklemini ele alalım.

Burada, $u(t, \varepsilon)$ boyutsuz değişken ve ε da boyutsuz küçük parametredir. (1.1.28)'in yaklaşık çözümünün

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (1.1.29)$$

şeklinde ifade edildiğini kabul edelim.

(1.1.29)'u (1.1.28)'de yerine koyalım:

$$(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots)'' + (1 + \varepsilon)(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) = 0. \quad (1.1.30)$$

ε 'ların derecelerine göre katsayılarını önlerine yazalım:

$$u_0'' + u_0 + \varepsilon(u_1'' + u_1 + u_0) + \dots = 0. \quad (1.1.31)$$

u_n , ε 'dan bağımsız ve (1.1.31) ε 'un tüm küçük değerleri için geçerli olduğundan, her ε 'un katsayısı sıfıra eşitlenir:

$$\varepsilon^0 : u_0'' + u_0 = 0, \quad u_0(0) = A, \quad u_0'(0) = 0, \quad (1.1.32)$$

$$\varepsilon^1 : u_1'' + u_1 + u_0 = 0, \quad u_1(0) = u_1'(0) = 0. \quad (1.1.33)$$

(1.1.32)'nin çözümü şu şekildedir:

$$u_0 = A \cos t. \quad (1.1.34)$$

u_0 'ı (1.1.33)'de yerine koyarak elde edilen denklemin çözümü şöyledir:

$$u_1 = -\frac{1}{2} A t \sin t. \quad (1.1.35)$$

Ne yazık ki, (1.1.35), $u_0(t)$ 'nin küçük ve periyodik bir fonksiyon olmasına rağmen, u_1 'in periyodik olmayan ve $t \rightarrow \infty$ için sınırsız olduğunu gösterir. Bu nedenle, eğer amacımız (1.1.28) denkleminde periyodik çözümler bulmaksa, (1.1.29)'un uygulamasının yetersiz oluşu ciddi zorluklar doğurur. u_0 ve u_1 'in (1.1.29)'da yerine konmasıyla, aşağıdaki birinci dereceden yaklaşık çözümü elde ederiz.

$$u = A \cos t - \frac{1}{2} \varepsilon A t \sin t. \quad (1.1.36)$$

İlk terim olan $u_0 = A \cos t$ 'nin kesinlikle doğru bulunmuş olması gerekmektedir ve bundan elde edilen ilk yaklaşım $-\varepsilon A t \sin t / 2$ olur. Bu yaklaşımın gerektiği kadar küçük olmasının, sadece εt 'nin küçük olmasına bağlı olduğu unutulmamalıdır.

$\varepsilon t = O(1)$ olması durumunda, ilk terimden elde edilen küçük yaklaşım, terimin derecesi olur. Gerçekten de, $\varepsilon t > O(1)$ olması durumunda, terimin derecesi haline gelen küçük yaklaşım doğru olarak kabul edilir. Bu nedenle, straightforward açılım sadece $t < O(\varepsilon^{-1})$ durumunda geçerlidir ve t 'nin her değeri için düzgün değildir.

(1.1.28)'in tam çözümü şu şekildedir:

$$u = A \cos(\sqrt{1 + \varepsilon}) t. \quad (1.1.37)$$

(1.1.37)'nin açılımı şunu verir:

$$u = A \cos(\sqrt{1 + \varepsilon}) t = A \cos t - \frac{1}{2} \varepsilon t A \sin t + \dots. \quad (1.1.38)$$

(1.1.38)'in sağ yanındaki sonlu sayıdaki terimin, nonperiyodik ve $t \rightarrow \infty$ için sınırsız olan bir fonksiyon tanımladığı kolayca görülür. $n = 1, 2, 3, \dots$ için $t^n \sin t$ veya $t^n \cos t$ gibi terimlere seküler terim denir. (1.1.29)'daki seri çözüm düzgün olmadığı için seküler terimler artar. (1.1.25) denkleminin sadece sonlu sayıdaki terimlerinin alınması, ifadenin açılımının periyodikliğini bozacağı ve $t \rightarrow \infty$ için sınırsız olacağı açıkça görülür. Bununla birlikte, sonuçlanan seriler yakınsaktır,

yavaş yakınsar ve bu serilerin sonlu sayıdaki terimleri kullanıldığından bütün t 'ler için çözüm olarak alınamaz. İleriki bölümlerde, seküler terimleri ayırmak için bazı teknikler tanıtılacaktır.

Perturbasyon metodlarının bir olumsuzluğu da şudur: Birçok önemli soruda küçük perturbasyonların tanıtımı, çözümlerin niteleyici ve niceleyici özelliklerini ortaya koyar, ve bu özellikler perturbe edilemeyen problemlerin çözümlerinin özelliklerinden çok farklıdır. Örneğin, aşağıdaki iki örneği [6] ele alalım:

$$u' + u - \varepsilon = 0 \quad , \quad u(0) = 1 \quad (1.1.39)$$

ve
$$u' - u - \varepsilon = 0 \quad , \quad u(0) = 1 . \quad (1.1.40)$$

(1.1.39) denkleminin çözümü $u(t) = \varepsilon + (1 - \varepsilon)e^{-t}$ iken, perturbe edilemeyen çözümü $u_0(t) = e^{-t}$ 'dir. $\varepsilon \ll 1$ olması durumunda, $|u(t) - u_0(t)| \leq \varepsilon$ için perturbasyon çözümünün doğruluk oranı yüksektir.

Benzer şekilde, (1.1.40) denklemini için şunu elde ederiz:

$$|u(t) - u_0(t)| = \varepsilon |1 - e^t| . \quad (1.1.41)$$

$t > 1$ olması durumunda, u_0 , (1.1.40) denkleminin yaklaşık çözümü olarak göz önünde tutulmaz.

Perturbasyon metodlarının kendilerine ait sınırlamaları vardır:

1. Hemen hemen bütün perturbasyon metodları, bir denklemde küçük bir parametrenin bulunması varsayımına dayanır. Bu küçük parametre varsayımı,

perturbasyon tekniklerinin uygulamalarını önemli ölçüde sınırlar. Nonlinear problemlerin, özellikle güçlü nonlinearliğe sahip olanlarının ise küçük parametreleri yoktur;

2. Daha zoru ise, bu küçük parametrenin nasıl saptanacağıdır ve bu da özel teknikler gerektirir. Küçük parametrenin uygun seçiminin ideal sonuçları vermesinin yanında küçük parametrenin uygunsuz seçimi de ciddi anlamda kötü sonuçlara yol açabilir;

3. Uygun küçük parametre bulunsa bile, çoğu durumda , perturbasyon metodları ile bulunan yaklaşık çözüm, sadece parametrenin küçük değerleri için geçerlidir. Örneğin, çoklu ölçek metoduyla çözülen yaklaşımlar, sistem parametresi küçük olduğu sürece düzensizdir. Fakat yaklaşımlara tamamen güvenemeyiz çünkü parametrenin ne kadar küçük olması gerektiği konusunda bir kriter yoktur. Bu nedenle, yaklaşımların geçerliliğini sayısal olarak veya deneme yoluyla kontrol etmek gereklidir [7].

Bilinen yöntemlerin başarısız olduğu alanlar için problem çözmede bazı yeni geliştirilmiş metodlar tanıtmamız gerekecektir.

1.2. Nonlinear Newton-Raphson İterasyon Metodu

İyi bilinen Newton-Raphson metodu (Burada lineer Newton-Raphson metodundan bahsediliyor) nümerik metodlarda [8-9] yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu metod, her ne kadar, çoğu zaman etkili olsa da, bazı koşullarda (örneğin, çok güçlü nonlinear denklemlerde) yetersiz kalabilmektedir. Bu bölüm, Newton-Raphson metodunun olumsuzluklarını giderebilmek için, bu metodun modifikasyonunu önermektedir. Bu metod, modifiye Newton-Raphson Metodu [10] veya nonlinear Newton-Raphson iterasyon metodu olarak

adlandırılır. Bu metotta x_n yerine x_n^r kullanılır; burada n iterasyon indeksi ve r birimden farklı bir sabittir. “Modifiye Newton Raphson Metodu” terminolojisini bazı standart kitaplarda [9] başka anlamlarda kullandığımız bilinmelidir. Teğet matrisi, bu metotta açıklanan her iterasyon yerine, sonraki durumda sadece artış nedeniyle yenilenecektir.

Aşağıdaki denklemi ele alalım:

$$f(x) = 0 . \quad (1.2.1)$$

Eğer x_n önceden bilinen kök ise, $f(x_n) \neq 0$ olmak üzere, aşağıdaki ifadeyi oluşturarak, önceden bilineni yenileyerek tekrar yazabiliriz:

$$x_{n+1} = x_n + \lambda f(x_n), \quad (1.2.2)$$

Burada λ Lagrange çarpanıdır. λ 'nın bulunabilmesi için, yukarıdaki ifadenin x_n 'e [11~14] göre türevi alınarak, sifıra eşitlenir:

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = 1 + \lambda f'(x_n) = 0 . \quad (1.2.3)$$

Bu denklemde λ çekilerek, şu şekilde bulunur:

$$\lambda = -\frac{1}{f'(x_n)} . \quad (1.2.4)$$

Bulunan λ çarpanını, (1.2.2) denkleminde yerine koyarak, bilinen Newton-Raphson formülünü elde ederiz:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} . \quad (1.2.5)$$

Tabii ki de, Newton metoduyla, iyi bir başlangıç tahmini için dikkate değer olan yakınsak sonuçlar bulunur.

Örnek 1

Öncelikle, $x_0 = 0.5$ başlangıç değeri ile

$$f(x) = x^{10} - 1, \quad (1.2.6)$$

örneğini ele alalım.

1.2.1 Çizelgesi, $r = 1$ için iterasyon prosedürünü [10] göstermektedir. Newton iterasyonunun tam köke zayıf yaklaşımdan dolayı ancak 42 iterasyondan sonra, çok yavaş bir şekilde yakınsadığı görülür. Bunun üstesinden gelmek için, bazı güvenilir modifikasyonlar önerilir.

Çizelge 1.2.1

İterasyon	x(r=1)	x(r=2)	x(r=3)	x(r=5)	x(r=5.5)	x(r=7)
1	51.650	7.169	3.376	1.741	1.581	1.275
2	46.485	6.412	2.997	1.571	1.371	1.105
3	41.836	5.735	2.661	1.324	1.196	1.016
4	37.652	5.129	2.363	1.166	1.070	1.000
5	33.887	4.588	2.098	1.055	1.010	1.000
6	30.498	4.103	1.863	1.007	1.000	1.000
7	27.448	3.670	1.655	1.000	1.000	1.000
8	24.704	3.283	1.470	1.000	1.000	1.000
9	22.233	2.936	1.309	1.000	1.000	1.000
10	20.010	2.626	1.174	1.000	1.000	1.000

Kaynak [14] te belirtildiği üzere,

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad (1.2.7)$$

gibi herhangi bir iterasyon formülü, Lagrange çarpanıyla şu şekilde geliştirilebilir:

$$x_{n+1} = g(x_n) + \lambda f(x_n). \quad (1.2.8)$$

Bu denklemden λ çekilerek, şu şekilde bulunur:

$$\lambda = -\frac{g'(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (1.2.9)$$

Böylelikle aşağıdaki genel iterasyon formülü elde edilir:

$$x_{n+1} = g(x_n) - \frac{g'(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (1.2.10)$$

Eğer $g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ise, (1.2.10) denkleminde şunu elde ederiz:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)f^2(x_n)}{f'^3(x_n)}, \quad (1.2.11)$$

Bu da, homotopi perturbasyon metodu [15] ile bulunan sonuca çok benzerdir. Detaylar için Bölüm 3.1'e bakınız.

Şimdi (1.2.2) denklemini aşağıdaki biçimde modifiye edelim:

$$x_{n+1}^r = x_n^r + \lambda f(x_n). \quad (1.2.12)$$

λ çarpanının yerine konmasıyla aşağıdaki yeni iterasyon formülünü elde ederiz:

$$x_{n+1}^r = x_n^r - \frac{rx_n^{r-1}f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (1.2.13)$$

$r = 1$ durumunda, orijinal Newton-Raphson metodu, lineer Newton-Raphson metodu olarak adlandırılır. Önerilen metod ise, nonlinear Newton-Raphson metodu veya yüksek dereceden Newton-Raphson metodu olarak nitelendirilir. Nonlinear Newton-Raphson metodu teğet doğrusu yerine eğrilik kavramını ($r = 2$ için bir parabol) kullanır.

1.2.1 çizelgesi, r 'nin çeşitli değerleri için (1.2.13) denkleminin iterasyon prosedürünü gösterir. Bu modifikasyonun, r 'nin geniş aralığı için yakınsaklığı arttırdığını görürüz.

Örnek 2

Aşağıdaki denklemi ele alalım:

$$f(x) = \sin x. \quad (1.2.14)$$

Eğer $x_0 = 1.6$ ile başlarsak, $f'(1.6) = -0.029$ küçük bir değer olduğu için lineer Newton-Raphson metodu geçerli olmaz. Bundan dolayı, lineer Newton-Raphson metodu iraksar. 1.2.2 çizelgesi, $r = 10$ için nonlinear Newton-Raphson metodunun iterasyon prosedürünü göstermektedir.

Çizelge 1.2.2

İterasyon	x(r=10)
0	1.6
1	2.7375
2	3.0075
3	3.1210
4	3.1410

$x_0 = 1.6$ ya en yakın çözüm $x = \pi$ 'dir. Mevcut tekniğin geçerliliği görülür.

Örnek 3

Aşağıdaki çok katlı köke sahip problemi ele alalım:

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x-3)(x-1)^2 . \quad (1.2.15)$$

Bildiğimiz üzere, Newton-Raphson metodu çok katlı köklerle çalışamaz. r 'ye keyfi bir değer verelim, mesela, $r = 3$ için şunu elde ederiz:

$$x_{n+1}^3 = x_n^3 - \frac{3x_n^2(x_n^3 - 5x_n^2 + 7x_n - 3)}{3x_n^2 - 10x_n + 7} .$$

1.2.3 çizelgesi iterasyon prosedürünü göstermektedir:

Çizelge 1.2.3

İterasyon	$x(r = 3)$
0	0.5
1	0.6660
2	0.7951
3	0.8830
4	0.9366
5	0.96683
6	0.98301
7	0.99139

Newton-Raphson metodunun gelişmiş olan doğru araştırma metodu [16], zayıf başlangıç tahminine karşılık kullanılmaktadır. Her iterasyonda n , doğru araştırma algoritması, f 'nin, mümkün olan azalma yönü s_n boyunca, lineer, ikinci dereceden veya üçüncü dereceden yaklaşımını en uygun duruma getirmeyi dener.

$$x_{n+1} = x_n + \alpha_n s_n \quad , \quad \alpha_n > 0 \quad , \quad (1.2.16)$$

Yaklaşık en uygun skaler α_n 'in hesaplanmasıyla

$$\|f(x_n + \alpha_n s_n)\| < \|f(x_n)\| \quad (1.2.17)$$

bulunur.

Bu yaklaşımda, r 'nin uygun bir seçimi şu eşitsizliği garantiler:

$$\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\| .$$

Bu durumda bizim metodumuz doğru araştırma tekniğinden daha kolaydır. Önerilen modifiye Newton-Raphson metodu n -boyutlu problem için daha kullanışlıdır. Temel prosedürü daha iyi açıklayabilmek ve esas düşüncelyi gereksiz ve karmaşık matematiksel ifadelerden temizleyerek daha net hale getirebilmek için şu basit sistemi ele alalım:

$$\sin(x + y) = 0, \quad \cos(x - y) = 0. \quad (1.2.18)$$

Lagrange çarpanları uygulanarak, aşağıdaki iterasyon formülü oluşturulur:

$$x_{n+1}^p = x_n^p + \lambda_1 \sin(x_n + y_n) , \quad y_{n+1}^q = y_n^q + \lambda_2 \cos(x_n - y_n). \quad (1.2.19)$$

Burada p ve q sabitler, λ_1 ve λ_2 Lagrange çarpanlarıdır.

Çarpanların bulunabilmesi için aşağıdakilere ihtiyaç vardır.

$$\frac{\partial}{\partial x_n}(x_{n+1}^p) = 0 , \quad \frac{\partial}{\partial y_n}(y_{n+1}^q) = 0 . \quad (1.2.20)$$

Çarpanların bulunmasından sonra, aşağıdaki iterasyon formülü elde edilir:

$$x_{n+1}^p = x_n^p - \frac{p x_n^{p-1} \sin(x_n + y_n)}{\cos(x_n + y_n)} , \quad (1.2.21)$$

$$y_{n+1}^q = y_n^q - \frac{q y_n^{q-1} \cos(x_n - y_n)}{\sin(x_n - y_n)} . \quad (1.2.22)$$

Newton-Raphson iterasyon formülü Taylor Teoremi doğrultusunda da açıklanabilir. Eğer x_0 , $f(x)$ 'in yaklaşık kökü ise, o zaman $f(x)$ 'i Taylor serisine açarız:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + O[(x - x_0)^2] = 0. \quad (1.2.23)$$

Newton-Raphson iterasyon formülü olan (1.2.5) denklemindeki x 'in çözülmesi esastır. Bu, Newton-Raphson iterasyon formülünün temel sonucudur, bunun ötesinde, başka bir iterasyon formülü [17] de önerilir. Taylor serisini $(x - x_0)^2$ derecesinde tutarak, aşağıdakini elde ederiz:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + O[(x - x_0)^3]. \quad (1.2.24)$$

Bundan dolayı, (1.2.1) nonlinear denklemi aşağıdaki ikili sisteme dönüştürülür:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + g(x) = 0, \quad (1.2.25)$$

$$g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2. \quad (1.2.26)$$

Bunlardan yararlanılarak ve $g(x_0)=0$ alınarak aşağıdaki iterasyon formülleri oluşturulur.

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{1}{2} f''(x_n)(x_{n+1} - x_n)^2 + g(x_n) = 0, \quad (1.2.27)$$

$$g(x_n) = f(x_n) - f(x_{n-1}) - f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) - \frac{1}{2} f''(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})^2. \quad (1.2.28)$$

(1.2.27)'nin yeniden düzenlenmesiyle şu sonuca varılır:

$$Ax_{n+1}^2 + Bx_{n+1} + C + g(x_n) = 0. \quad (1.2.29)$$

Burada,

$$A = \frac{1}{2} f''(x_n), \quad B = f'(x_n) - f''(x_n)x_n, \quad C = f(x_n) - f'(x_n)x_n + \frac{1}{2} f''(x_n)x_n^2$$

dir.

(1.2.29)'un çözümü aşağıdaki iterasyon formülünü verir:

$$x_{n+1} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4A(C + g(x_n))}}{2A}. \quad (1.2.30)$$

Gerçek çözüm için $B^2 - 4A(C + g(x_n)) > 0$ eşitsizliğine ihtiyaç vardır.

Yukarıdaki iterasyon formülü yüksek bir yakınsaklığa sahiptir.

Örnek 4

Aşağıdaki ikinci dereceden polinom verilsin:

$$f(x) = x^2 + x - 2 = 0. \quad (1.2.31)$$

$x_0 = 0$ 'ın bu polinomun başlangıç yaklaşık çözümlerinden biri olduğu farzedilerek, (1.2.30) iterasyon formülüyle sadece bir adımda tam çözüm ($x = 1$ ve $x = -2$) hemen bulunur.

Örnek 5

$x = 0$ civarında aşağıdaki transendental denklemin pozitif kökünü bulmak için:

$$f(x) = x^3 - e^{-x} = 0, \quad (1.2.32)$$

$x_0=0$ ile başlayarak birkaç iterasyon sonunda, $x = 0.7729$ buluruz. Başlangıç tahmini $B^2 - 4A(C + g(x_n)) > 0$ koşulunu garantileyemezse, x_0 'ı uygun bir yöntemle yenilemeyi (örneğin, $x_1^3 - e^{-x_1} = 0$ denklemini çözerek) unutmayalım. 1.2.4 çizelgesi iterasyon prosedürünü göstermektedir.

Çizelge 1.2.4

İterasyon	x
0	0
1	1
2	0.8123
3	0.7743
4	0.7729

(1.2.6) denklemini, $x_0 = 0.5$, $B^2 - 4A(C + g(x_n)) < 0$ koşullarıyla tekrar ele alalım. Bu durumda $x_1^9 x_0 = 1$ 'i çözerek, başlangıç tahminini değiştirmeliyiz.

1.3. Homotopi Perturbasyon Metodu

Homotopi perturbasyon metodunun [15,18] diğer analitik metodlara göre önemli avantajları vardır. Metodun temel amacını daha iyi açıklayabilmek ve esas düşüncüyü gereksiz ve karmaşık matematiksel ifadelerden temizleyerek daha net hale getirebilmek için aşağıdaki cebirsel denklemi [19,20] ele alalım:

$$x^5 + x - 1 = 0. \quad (1.3.1)$$

Bu denklemin bir çözümü olduğunu iddia ederiz ve Newton metoduyla

$$x = 0.75487767... \quad (1.3.2)$$

olduğunu hesaplarız.

Denkleminde kesin veya açık bir küçük parametre olmamasından dolayı, ε küçük parametresinin seçiminde özgürüz. Böyle küçük bir parametrenin tanıtılması için mevcut olan çeşitli olasılıkları ele alalım.

1.3.1. δ Metodu

δ metodunun [19,20] temel amacı, (1.3.1)'deki nonlineer terimin üssündeki sahte δ parametresinin tanıtılmasıdır.

$$x^{1+\delta} + x - 1 = 0. \quad (1.3.3)$$

Çözümün, δ 'ya göre kuvvet seri açılımı olduğu varsayılır:

$$x = c_0 + \delta c_1 + \delta^2 c_2 + \dots \quad (1.3.4)$$

Bu serinin katsayıları kolaylıkla hesaplanabilir. İlk birkaç katsayı şunlardır [19,20]:

$$c_0 = 0.5 \quad , \quad c_1 = 0.17328 \quad , \quad c_2 = -0.08664 \quad , \quad c_3 = 0.05139 \quad , \\ c_4 = -0.03377 \quad , \quad c_5 = 0.02377 \quad , \quad c_6 = -0.01758.$$

(1.3.4) serisinin yakınsaklık yarıçapı $R = 1$ 'dir. $\delta = 4$ için, bu seri kesin ve çok hızlı bir şekilde ıraksar. İlk altı terimin toplamı -54.3224 'tür. Metod hakkındaki yorumlar için kaynak [21]'e bakınız.

Mühendislikte, daima ilk birkaç terime ihtiyaç duyulur, diğer terimleri bulmak çoğu zaman zor olabilir.

1.3.2. Zayıf Çift Yaklaşım

Aşağıdaki denklemi ele alalım:

$$\varepsilon x^5 + x - 1 = 0. \quad (1.3.5)$$

x 'i ε 'un kuvvet serisi biçiminde ifade edelim:

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \quad (1.3.6)$$

Bölüm (1.2)'de açıklanan standart adımlarla aşağıdakileri hesaplarız:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = -35, \dots$$

x_n için kapalı bir ifade vardır:

$$x_n = \frac{(-1)^n (5n)!}{n!(4n+1)!}.$$

(1.3.6) serisinin yakınsaklık yarı çapı $R = 4^4 / 5^5 = 0.08192$ 'dir ve bu seri de $\varepsilon = 1$ için çok hızlı bir şekilde ıraksar.

1.3.3. Güçlü Çift Yaklaşım

Aşağıdaki denklemi ele alalım:

$$x^5 + \varepsilon x - 1 = 0. \quad (1.3.7)$$

(1.3.7) denkleminin çözümünün (1.3.6)'da gösterilen, ε 'un kuvvet serisi biçiminde ifade edildiğini varsayalım.

(1.3.6)'yı (1.3.7)'de yerine koyarak ve eşit kuvvetli ε 'ların katsayılarını eşitleyerek, serinin katsayılarını kolaylıkla hesaplayabiliriz:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = -1/25, \dots .$$

x_n için kapalı bir ifade bulabiliriz:

$$x_n = -\frac{\Gamma\left(\frac{4n-1}{5}\right)}{5\Gamma\left(\frac{4-n}{5}\right)n!},$$

serinin yakınsaklık yarıçapı $R = 5/4^{4/5} = 1.649$ 'dur. $\varepsilon = 1$ 'in yakınsaklık yarıçapı içinde yer almasına rağmen mevcut seri tam çözüme çok yavaş yakınsar. Önceki metodlardan farklı olarak, homotopi perturbasyon metodunu [15,18] çözümü bulmak için kullanacağız.

Aşağıdaki homotopi [22] kurulur:

$$(1-p)[(1+b)x-1] + p(x^5 + x-1) = 0, \quad p \in [0,1] \quad (1.3.8)$$

$$\text{veya} \quad (1+b)x-1 = p(bx-x^5), \quad p \in [0,1]. \quad (1.3.9)$$

Burada b bilinmeyen bir sabittir. Eğer $x=1/(1+b)$ tam çözüm ise, $bx - x^5$ bütünüyle kaybolur, fakat çoğu nonlineer denklemler için durum bu değildir. Aşağıdaki ifadeyi minimum yapacak şekilde bir b sabiti seçebiliriz:

$$\int_0^1 (bx - x^5)^2 dx \rightarrow \min. \quad (1.3.10)$$

Buradan $b = 3/7$ buluruz.

p yapay parametresinin sıfırdan bire doğru monoton olarak artmasıyla, $(1+b)x=1$ aşıkâr problemi sürekli biçimde bozularak (1.3.1) denklemlerle esas probleme dönüşür. Bu nedenle, eğer (1.3.9) denklemi için bir iterasyon formülü oluşturabilirsek, yapay parametresinin sıfırdan bire artışıyla, yaklaşım serisi çözüm basamakları boyunca taşınır. Bu da başlangıç çözümünü (1.3.1) esas denklemin çözümüne görüntüler. $0 \leq p \leq 1$ durumu gereğince, embedding parametresini, “küçük parametre” olarak adlandırabiliriz. Aşağıdaki biçime sahip (1.3.9)’un çözümünü araştıralım:

$$x = c_0 + pc_1 + p^2c_2 + \dots \quad (1.3.11)$$

Bu serinin katsayıları kolaylıkla hesaplanabilir. Birkaçını şu şekilde hesaplayalım:

$$c_0 = \frac{1}{1+b} = 0.7 \quad , \quad c_1 = \frac{bc_0 - c_0^5}{1+b} = 0.09235 \quad , \quad c_2 = \frac{bc_1 - 5c_0^4c_1}{1+b} = -0.032355.$$

Böylece ikinci mertebeye kadar olan yaklaşık çözümleri buluruz:

Sıfıncı mertebeden yaklaşım: $x_0 = c_0 = 0.7$,

Birinci mertebeden yaklaşım: $x_1 = c_0 + c_1 = 0.79235$,

İkinci mertebeden yaklaşım: $x_2 = c_0 + c_1 + c_2 = 0.75999$.

İkinci mertebeden yaklaşık çözüm, tam çözümden sadece %0.6 farkeder. Benzer basit bir yöntemle, doğruluk oranı fazla olan yüksek mertebeli yaklaşık çözümleri de bulabiliriz. Bu basit bir yöntemdir, burada değinmeyeceğiz.

Homotopinin kurulması için alternatif yaklaşımlar vardır. (1.3.1) denklemini aşağıdaki şekilde tekrar yazarız:

$$x = 1 - x^5 = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4). \quad (1.3.12)$$

Homotopi parametresini aşağıdaki formlara yerleştirebiliriz:

$$x = (1 - x)[1 + p(x + x^2 + x^3 + x^4)] , \quad p \in [0,1]. \quad (1.3.13)$$

$$x = (1 - x)[1 + x + p(x^2 + x^3 + x^4)] , \quad p \in [0,1]. \quad (1.3.14)$$

Birkaç iterasyon adımı bile doğru sonuç için yeterlidir. Homotopi perturbasyon metodu ile ilgili detaylı bilgi için Bölüm 3'e bakınız.

1.4. Perturbasyon Metodunun İlerisi

Perturbasyon metodunun çözüm prosedürü çok basittir, fakat Bölüm 1.1'de belirtildiği gibi bazı dezavantajları vardır. Perturbasyon metodunda x_0 ilk terimi önemli rol oynar. Olumsuzlukları yok etmek için, homotopi perturbasyon metodu küçük parametre varsayımlarını tümüyle eler. Bu bölümde modifiye perturbasyon metodunu önereceğiz.

Genel perturbasyon metodu şu şekilde ifade edilebilir:

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots , \quad (1.4.1)$$

$\varepsilon = 0$ durumunda x_0 baş terimi denklemin çözümüdür. Bir sabiti denkleme açık olarak yazarak, bu olguyu modifiye etmeye çalışacağız. (1.1.1) denklemini tekrar ele alalım ve çözümün (1.4.1) formunda ifade edilebileceğini varsayalım. 1 sabitini de ε 'un kuvvet serisi biçiminde yazabiliriz:

$$1 = a_0 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \dots . \quad (1.4.2)$$

(1.4.1) ve (1.4.2)'yi (1.1.1)'de yerine koyarız:

$$(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots)^2 + \varepsilon(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots) - (a_0 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \dots) = 0. \quad (1.4.3)$$

ε 'ların derecelerine göre katsayılarını önlerine yazarak, şu denklemi elde ederiz:

$$x_0^2 - a_0 = 0 , \quad (1.4.4)$$

$$2x_0 x_1 + x_0 - a_1 = 0. \quad (1.4.5)$$

$\varepsilon = 0$ 'ın yerine konmasıyla (1.1.1) esas denkleminde elde edilmemiş olması, (1.4.4) denklemini (1.1.6)'dan farklı kılar. Bu güvenilir modifikasyon klasik perturbasyon metodlarını geliştirir. $x_0 = \pm 1$ yerine, (1.4.4)'ün çözümü şudur:

$$x_0 = \pm \sqrt{a_0} . \quad (1.4.6)$$

Bu nedenle, a_0 daha sonra belirlenecek olan serbest parametredir. x_0 'ın tüm $\varepsilon > 0$ 'lar için baş terim olmasını umuyoruz ki bulunan çözüm tüm $\varepsilon > 0$ 'lar için geçerli olsun.

(1.4.5)'in çözümü şunu verir:

$$x_1 = -\frac{x_0 - a_1}{2x_0}. \quad (1.4.7)$$

Bu yaklaşımda, x_1 'in x_0 cinsinden yazılabilmesi için $|x_1 / x_0| \ll 1$ eşitsizliğine ihtiyaç vardır. İfadeyi daha sade şöyle yazabiliriz:

$$x_0 - a_1 = 0. \quad (1.4.8)$$

Eğer birinci dereceden yaklaşık çözüm yeterliyse, o zaman (1.4.2)'den şunu elde ederiz:

$$1 = a_0 + \varepsilon a_1. \quad (1.4.9)$$

(1.4.6) ve (1.4.8)'i (1.4.9)'da yerine koyarak, şu sonuca ulaşırız:

$$x_0^2 + \varepsilon x_0 - 1 = 0. \quad (1.4.10)$$

Sonuç olarak x_0 tam çözümdür.

Bu basit düzeltme, (1.1.27) denklemlerli perturbasyon serisi çözümündeki seküler terimlerin meydana çıkmasına engel olacaktır.

$$u'' + (1 + \varepsilon)u = 0 \quad , \quad u(0) = A \quad , \quad u'(0) = 0. \quad (1.4.11)$$

Mevcut yaklaşımımızda, ε parametresi küçük olmak zorunda değildir. Hem çözüm, hem de denklemdeki 1 sabiti ε 'un kuvvetleri biçiminde şöyle açılır:

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots , \quad (1.4.12)$$

$$1 = \omega^2 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \dots , \quad (1.4.13)$$

Bu noktada, a_i 'ler bilinmeyen sabitlerdir. ω ise frekansımızı göstermektedir.

(1.4.12) ve (1.4.13)'ü (1.4.11)'de yerine koyarak şunu elde ederiz:

$$(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots)'' + (\omega^2 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \dots)(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) = 0 \quad (1.4.14)$$

ε 'ların derecelerine göre katsayılarını önlerine yazarak ve bu katsayıların her birini sıfıra eşitleyerek, u_0 ve u_1 için aşağıdaki diferansiyel denklemleri buluruz:

$$u_0'' + \omega^2 u_0 = 0 , \quad u_0(0) = A , \quad u_0'(0) = 0 , \quad (1.4.15)$$

$$u_1'' + a_0 u_1 + (1 + a_1) u_0 = 0 , \quad u_1(0) = u_1'(0) = 0 . \quad (1.4.16)$$

(1.4.15)'in çözümü kolayca aşağıdaki biçimde bulunur:

$$u_0 = A \cos \omega t . \quad (1.4.17)$$

u_0 'ın (1.4.16)'da yerine konması şunu verir:

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + (1 + a_1) A \cos \omega t = 0 . \quad (1.4.18)$$

$a_1 = -1$ olmadıkça (1.4.18) denkleminin her çözümü bir seküler terim içerecektir.

Bu nedenle,

$$a_1 = -1 \quad (1.4.19)$$

olmalıdır.

Böylece (1.4.18) denklemini şuna indirgenir:

$$u_1'' + a_0 u_1 = 0 \quad (1.4.20)$$

$u_1(0) = u_1'(0) = 0$ başlangıç koşulları göz önüne alınarak, (1.4.20)'nin çözümü

$$u_1 = 0 \quad (1.4.21)$$

olarak bulunur.

Bu nedenle, birinci mertebeden yaklaşık çözüm aşağıdaki gibi olur:

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 = A \cos \omega t. \quad (1.4.22)$$

(1.4.13)'ten elimizde

$$1 = \omega^2 + \varepsilon a_1 \quad (1.4.23)$$

vardı.

Böylece (1.4.22)'deki frekans kolayca belirlenir:

$$\omega = \sqrt{1 - \varepsilon a_1} = \sqrt{1 + \varepsilon} . \quad (1.4.24)$$

Sonuç olarak aşağıdaki tam çözüm bulunur:

$$u = A \cos \left[(1 + \varepsilon)^{1/2} t \right] . \quad (1.4.25)$$

Bu basit tekniğin daha ileri uygulamaları Bölüm 2.3'te gösterilmektedir.

1.5. Çok Eski Çin Metodu [23]

Dokuz bölüm içerdiği için adı “Nine Chapters on the Art of Mathematics” olan eserin sahibi büyük klasiklerden Jiu Zhang Suan Shu’dur. Bu eser, Çin matematik tarihinin en eski ve en güvenilir çalışmalarıdır. Ziraat, işletme, mühendislik, denklemlerin çözümü ve dik üçgenlerin özellikleri alanındaki 246 problemden oluşmuştur. Çözümlerin kuralları sistematik olarak verilmiştir, fakat Yunan duyarlılığında ispatlar yoktur. Bilindiği kadarıyla, Çin’in çok eski zamanlarına ait, en eski matematiksel sonuçları içerdiği tahmin ediliyor. Gerçekten de, Çin’in yazılı tarihinin en eski dönemlerinde Jiu Zhang Suan Shu’nun kökenlerinden bahsedilmektedir. Bir söylentiye göre, M.Ö. 27. yüzyılda yaşamış olan Yellow Emperor (Huang Di), elçisi Li Shou’yu, Jiu Zhang Suan Shu’nun [24] eserlerini derlemek için görevlendirmiştir. Dauben [24] tarafından belirtildiği üzere, Nine Chapters, içerdiği öklid elemanları sayesinde yaklaşık 2000 yıllık dönem içinde Batı matematiğine öncü olmuş saygı duyulması gereken bir Çin emsalidir. Nine Chapters’ın 7. Bölümünde, nonlinear denklemin yaklaşık gerçel köklerini bulmak için kullanılan en eski metod olan çok eski Çin algoritması Ying Buzu Shu (Fazlalık ve eksiklik metodu; çok az ve çok fazla yaklaşım) yer almaktadır. Metodun temel düşüncesini daha iyi açıklayabilmek için, bu bölümün ilk örneğine bakalım:

“Fiyatı bilinmeyen bir nesneyi, bilinmeyen sayıda insan satın alacaktır. Eğer her bir nesne 8 dolar olarak atanırsa, 3 dolar fazlalık; 7 dolar olarak atanırsa 4 dolar eksiklik oluyor. Bu nesnenin fiyatı ve insan sayısı kaçtır?”

Bu problem doğuda bilinen, elementer sayı teorisine ait Chinese Remainder Theory’ye çok benzerdir:

“3’e bölüldüğünde 2, 5’e bölüldüğünde 3 ve 7’ye bölüldüğünde 2 kalanını veren en küçük sayı kaçtır?”

Çin algoritması veya Çin metodu olarak bilinen bu algoritmanın çözüm prosedürü aşağıda verilmiştir (Şekil 1.5.1’e bakınız):

- 1) Atanan 8 ve 7 doları birinci sıraya koy;
- 2) 3 dolar fazlalığı ve 4 dolar eksikliği aşağı sıraya koy;
- 3) Çapraz çarparak 32 ve 21 bul, bunların toplamı 53 olur;
- 4) Atamaların farkı $4 - 3 = 1$;
- 5) Böylelikle $53/1=53$ fiyatını bulunuz.

Kısa ve modern biçimdeki prosedür şudur:

x_1 ve x_2 birbirinden farklı olarak atanan dolarlar (yaklaşık fiyatlar) ve R_1 ve R_2 de tam fiyata olan sapmaları olsun. Bu durumda fiyat şu biçimde ifade edilir:

$$\begin{array}{r}
 \overline{\text{III}} \text{ (8)} \quad \overline{\text{II}} \text{ (7)} \\
 \text{III} \text{ (3)} \quad \text{IIII} \text{ (4)} \\
 \hline
 \equiv \text{II} \text{ (32)} + \equiv \text{I} \text{ (21)} = \equiv \equiv \text{III} \text{ (53)}
 \end{array}$$

Şekil 1.5.1. Çok eski Çin matematikçileri tarafından kullanılan çözüm prosedürü

$$x = \frac{x_2 R_1 - x_1 R_2}{R_1 - R_2} . \quad (1.5.1)$$

Batının çift hata pozisyonu metodu, Çin algoritmasından doğmuştur. $f(x) = 0$ cebirsel denklemini ele alalım; x_1 ve x_2 denklemin yaklaşık çözümleri olsun, bunlardan elde edilen kalanlar da sırasıyla $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ olsun. Bu durumda, geliştirilmiş yaklaşık çözüm şu şekildedir:

$$x_3 = \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)} . \quad (1.5.2)$$

(1.3.1) denklemini tekrar ele alalım. $x_1 = 0$ için kalan $R_1 = -1$, $x_2 = 1$ için kalan $R_2 = 1$ 'dir. $x \in [0,1]$ için (1.3.1) denkleminin çözümünün olduğunu iddia ediyoruz.

Bu nedenle, bu çok eski Çin metodunu uygulayarak, şunu elde ederiz.:

$$x_3 = \frac{x_2 R_1 - x_1 R_2}{R_1 - R_2} = \frac{-1}{-1-1} = 0.5 . \quad (1.5.3)$$

Bu çözüme karşılık gelen kalan da $R_3 = -0.46875 < 0$ 'dır. Ara Değer Teoremi bize şunu söyler: (1.3.1) denkleminin çözümü olan ve çok eski Çin Metodu tarafından yaklaşığı bulunabilen, (0.5,1) aralığına ait bir x_4 noktası mevcuttur:

$$x_4 = \frac{x_3 R_2 - x_2 R_3}{R_2 - R_3} = \frac{0.5 + 0.46875}{1 + 0.375} = 0.7045. \quad (1.5.4)$$

%6.6 doğruluk oranı oldukça iyi bir sonuçtur. Tabi ki, prosedüre kolaylıkla devam edilerek, doğruluk oranı daha yüksek olan yaklaşık çözümlere ulaşılabilir. Şimdi (1.5.2) denklemini aşağıdaki biçimde tekrar yazalım:

$$x_3 = \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)} = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_2)}{f(x_1) - f(x_2)}. \quad (1.5.5)$$

Eğer $f'(x_1)$ türevini aşağıdaki gibi tanımlarsak:

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, \quad (1.5.6)$$

Newton (1642~1727) tarafından öne sürülen ve çok iyi bilinen aşağıdaki Newton iterasyon formülünü elde ederiz:

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (1.5.7)$$

İki noktanın (x_1 ve x_2), tam kökün iki tarafına yerleştiği durumlarda (Yani $f(x_1).f(x_2) < 0$ durumunda), Çin algoritmasının, çok iyi bilinen Newton iterasyon formülüne göre önemli avantajları vardır. Çin algoritmasından görüldüğü üzere, Çin matematikçilerinin bilimin ilerlemesinde çok katkıları

olmuştur. 8. Bölümde, biraz daha ileri giderek, çok eski ünlü Çin matematiğine dair bilgileri ve bunların uygulamalarını göreceğiz.

1.6. Periyodik Çözümler

Sinüzoidal fonksiyon yardımıyla nonlinear oskilatörlerin periyodik çözümü yaklaşık olarak bulunabilir. Bu, denklemin terimlerinin açık olarak denetlenmesi sayesinde denklemin salınımına sahip olup olmadığına anlaşılmasına yardım eder. Tam çözümlerinin fiziksel anlayış için önemli olduğu, aynı mertebeye sahip iki diferansiyel denklemi ele alalım:

$$u'' - k^2 u = 0, \quad (1.6.1)$$

ve
$$u'' + \omega^2 u = 0. \quad (1.6.2)$$

Her iki denklem de sabit katsayılı lineer terimlere sahiptir. Bu iki denklem arasındaki fark, ikinci terimdeki u 'nin katsayısının işaretidir. Bu, çözümün üstel mi yoksa salınan mı olduğunu belirler. (1.6.1) denkleminin genel çözümü şudur:

$$u = Ae^{kt} + Be^{-kt}. \quad (1.6.3)$$

İkinci denklem olan (1.6.2)'deki u 'nin katsayısı pozitifdir ve bu durumda genel çözüm şöyle olur:

$$u = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (1.6.4)$$

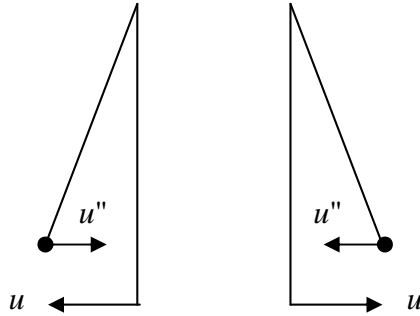
Bu çözüm, ω açısal hızındaki oskilasyonu tanımlar.

Üstel ve sinüzoidal fonksiyonlar birçok yaklaşık analitik metotta deneme fonksiyonları olarak kullanılır. Bu fonksiyonlar, fizikte karşımıza çıkar. Şekil

1.6.1'deki matematiksel sarkacı ele alalım. Bunun ile ilgili denklem şöyle ifade edilir:

$$u'' = -\left(\frac{g}{\ell}\right)u \quad [\text{ivme-başlangıç kuvveti}]$$

g/ℓ 'nin pozitif olmasından dolayı, u'' ivmesi daima u 'nun ters işaretlisidir. Bu da sarkacın merkeze doğru geri dönmesinin sebebidir.



Şekil 1.6.1. Basit sarkaç, hareket boyunca, u 'nun ve u'' ivmesinin ters işaretli olduğunu gösterir.

Benzer biçimde aşağıdaki nonlineer denklem [2]

$$u'' + u^5 = 0, \quad (1.6.5)$$

bir oskilasyon tanımlar: u pozitif olduğu zaman, ivme aşağıda görüldüğü gibi negatif olur:

$$u'' = -(u^4)u. \quad (1.6.6)$$

Bunun aksine, u negatif olduğu zaman, ivme pozitif olur.

Denklem [2] nin tersine

$$u'' - u^5 = 0 \quad (1.6.7)$$

denklemini $u'' = (u^4)u$ (1.6.8)

denklemini için bir oskilasyon tanımlayamaz. Bundan dolayı u'' ivmesi u ile aynı işarete sahiptir. Bu durumda, sistem merkezi denge pozisyonuna ($u = 0$) geri dönemez, hatta yeri değiştirilmiş nesne daha da ileriye doğru hızlanır. Aşağıdaki genel denklemi ele alalım:

$$u'' + k(u)u = 0, \quad (1.6.9)$$

$k(u) > 0$ durumunda (1.6.5) denklemini bir oskilasyon tanımlar. Örneğin, şu denklem

$$u'' + t^2 u^5 = 0, \quad (1.6.10)$$

denklemini

$$u'' + (t^2 u^4)u = 0. \quad (1.6.11)$$

formunda yazılabilir.

u' 'nin katsayısı $k = t^2 u^4$ pozitifdir.

Şimdi Friedmann denklemini [25] ele alalım:

$$u'' + a \frac{u'^2}{u} + cu^3 + du = 0. \quad (1.6.12)$$

(1.6.12)'yi daha anlaşılır biçimde tekrar yazalım:

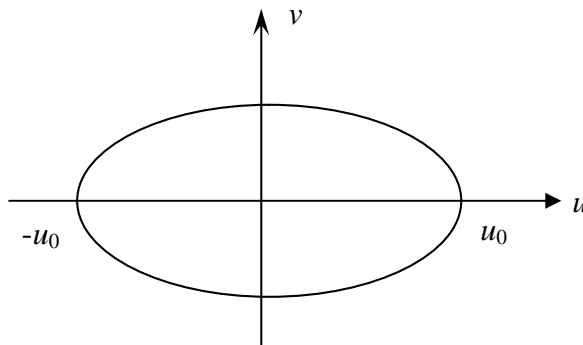
$$u'' + \left(a \frac{u'^2}{u^2} + cu^2 + d \right) u = 0 . \quad (1.6.13)$$

Eğer a , c ve d parametreleri pozitif ise, o zaman Friedmann denklemi periyodik çözümlere sahiptir.

Oskilatörün tam periyodunu bulmak yerine, aşağıdaki genel oskilasyonu ele alalım:

$$u'' + g(u) = 0 . \quad (1.6.14)$$

Burada g , u 'nun bir fonksiyonudur.



Şekil 1.6.2. Oskilatörün u - v yörüngesi

Aşağıdaki dönüşüm verilsin:

$$u' = v . \quad (1.6.15)$$

Zincir kuralından şunu yazarız:

$$u'' = v' = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dt} = v \frac{dv}{du} . \quad (1.6.16)$$

(1.6.14) denklemini şu şekle dönüştür:

$$v \frac{dv}{du} + g(u) = 0, \quad (1.6.17)$$

veya $vdv + g(u)du = 0$ (1.6.18)

Yukarıdaki denklemin integralini alırsak:

$$\frac{1}{2}v^2 + G(u) = E. \quad (1.6.19)$$

Burada E toplam enerji, G(u) da potansiyeldir ve şöyle tanımlanır:

$$\frac{d}{du}G(u) = g(u). \quad (1.6.20)$$

(1.6.19) denkleminde şunu elde ederiz:

$$v = \pm \sqrt{2E - 2G(u)}, \quad (1.6.21)$$

veya $dt = \pm \frac{du}{\sqrt{2E - 2G(u)}}$ (1.6.22)

Yukarıdaki denklemin $-u_0$ 'dan u_0 'a integralini alarak, şu sonucu buluruz [25]:

$$T = 2 \int_{-u_0}^{u_0} \frac{du}{\sqrt{2E - 2G(u)}} = \sqrt{2} \int_{-u_0}^{u_0} \frac{du}{\sqrt{E - G(u)}}. \quad (1.6.23)$$

Örnek 1

$g(u) = u + \epsilon u^3$, Duffing denkleminin $u = A \sin x$ dönüşümünü uyguluyoruz:

$$\begin{aligned}
T &= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \varepsilon A^2 - (\cos^2 x + \frac{1}{2} \varepsilon A^2 \cos^4 x)}} = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{1 - \cos^2 x + \frac{1}{2} \varepsilon A^2 (1 - \cos^4 x)}} \\
&= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{(1 - \cos^2 x) \left[1 + \frac{1}{2} \varepsilon A^2 (1 + \cos^2 x) \right]}} \\
&= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 + \varepsilon A^2 - \frac{1}{2} \varepsilon A^2 \sin^2 x}} = \frac{4}{\sqrt{1 + \varepsilon A^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k \sin^2 x}}. \quad (1.6.24)
\end{aligned}$$

Burada, $k = \frac{\varepsilon A^2}{2(1 + \varepsilon A^2)}$ dir.

Örnek 2

$$g(u) = \frac{u}{1 + \varepsilon u^2}. \quad (1.6.25)$$

Basit bir işlemle şunu elde ederiz:

$$T = 4\sqrt{\varepsilon} \int_0^A \frac{du}{\sqrt{\ln(1 + \varepsilon A^2) - \ln(1 + \varepsilon u^2)}} = 4\sqrt{\varepsilon} \int_0^A \frac{du}{\sqrt{\ln[(1 + \varepsilon A^2)/(1 + \varepsilon u^2)]}} \quad (1.6.26)$$

$\varepsilon A^2 \rightarrow \infty$ için, (1.6.18) periyodu şu şekilde indirgenir:

$$\lim_{\varepsilon A^2 \rightarrow \infty} T = 4\sqrt{\varepsilon} \int_0^A \frac{du}{\sqrt{2(\ln A - \ln u)}} = 4\sqrt{2\varepsilon} A \int_0^{\infty} (-x^2) dx = 2\sqrt{2\pi\varepsilon} A. \quad (1.6.27)$$

Örnek 3

$$g(u) = \varepsilon u^3 . \quad (1.6.28)$$

Şunu elde ederiz:

$$T = 2\sqrt{2} \int_0^A \frac{du}{\sqrt{\int_u^A \varepsilon s^3 ds}} = 2\sqrt{2} \int_0^A \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{4} \varepsilon (A^4 - u^4)}} = 4\sqrt{2} \int_0^A \frac{du}{\sqrt{\varepsilon (A^4 - u^4)}} .$$

Yukarıdaki denkleme $u = A \cos x$ dönüşümünü uygulayarak şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{\sqrt{\varepsilon A^2 \sin^2 x (1 + \cos^2 x)}} = \frac{4}{\sqrt{\varepsilon A^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 x}} \\ &= \frac{4}{\varepsilon^{1/2} A} \times 1.68575 = \frac{6.743}{\varepsilon^{1/2} A} \end{aligned} \quad (1.6.29)$$

Örnek 4

$$g(u) = \frac{\varepsilon}{u} . \quad (1.6.30)$$

Şunu elde ederiz: $T = 2\sqrt{2} \int_0^A \frac{du}{\sqrt{\int_u^A \varepsilon / s ds}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^A \frac{du}{\sqrt{\ln A - \ln u}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} A \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{\ln(1/s)}}$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} A \times \sqrt{\pi} = 2\sqrt{2\pi / \varepsilon} A \quad (1.6.31)$$

2.PERTURBASYON METODLARINA KISA BİR GİRİŞ

Perturbasyon metodları belki de modern matematiğin en romantik alanıdır. Bilimsel problemleri araştırmak için matematiksel metotların uygulamalarında karşılaşılan birçok zorluk vardır. Bunlardan en önemlisi basit denklemlerin bile tek çözümlerinin olmaması gerektiği gerçeğidir.Sonuç olarak eğer fiziksel yöntemlerin formüllerinden kesin bir anlam çıkarmakta kararsızsak,farklı yaklaşım tiplerine başvurmak zorundayız.Bunların başında geleni mekanik,fizik ve diğer pozitif bilimler için geniş uygulamaları olan perturbasyon metodlarıdır.Perturbasyon metodu bir sanattır.Ünlü isimler genellikle başarılı yaklaşımlarıyla bu sanata ortak olurlar.Bu bölümde biz lineer olmayan zayıf denklemler için geçerli olan çeşitli perturbasyonlar ve perturbasyon metodlarının eksik kısımlarını yok eden ve bu yüzden lineer olmayan güçlü sistemler için geçerli olan çeşitli modern modifikasyonlar üzerinde duracağız.

2.1 Perturbasyon Metodu İle Neptün Ve Platon'un Keşfi[1]

Gökyüzü mekaniğinde perturbasyon metodunu kullanan ilk isimler J.Euler (1707-1783) ve J.L.Lagrange (1736-1813)dır ve Euler perturbasyon teoreminin babası olarak düşünülür.Euler'in inceleme yazısında hem perturbasyon teori metodunun fikirleri hem de örneğin,belirli nümerik değerlerinin noktaları için çözülen astronomik problemlerin çözümleri vardır.Euler tarafından gerçekleştirilen bu metodlar Lagrange,Laplace ve diğerlerine gezegensel hareketin oldukça kesin bir teorisini oluşturma imkanı vermiştir.

Herbir yaklaşımı, çok küçük olduğu sanılan, ihmal edilen değerlere uyan, üzerinde düşünülen problemin kesin belirli bir durumunun bir tam çözümü kabul eder.Bu çözüm yaklaşımın birinci mertebesini oluşturur.Sonra, şimdiye kadar ihmal edilen değerleri hesaplayarak yavaş

yavaş doğrulanır.Sadece yaklaşımlarla çözülebilen bu mekanik problemlerinde şekil üzerinde hareket eden sadece gerçek güçleri düşünerek genellikle ilk çözüm bulunur.Geriye kalan diğer güçleri hesaba katarak pertube diye de adlandırılabilen bu çözümü genişletmek için en kolay yol değişken olarak kapsanan bütün keyfi sabitleri düşünerek ilk çözümün formunu tutmaktır.Şu sebeptendir ki önceden ihmal edilen şimdi hesaba katılması gereken değerler çok küçük olursa o zaman yeni değerler sabit olmalı ve yaklaşımların geleneksel metodları belki onlara uygulanabilir.

Pertürbasyon metodunun en aşikar başarı örneklerinden biri Neptün'ün keşfiydi.Bu, 18. yüzyılda güneşe en uzak gezegen olduğu düşünülen Uranüs'ün hareketinde pertürbasyonun keşfinde ortaya çıktı.Bilinmeyen rahatsız edici bir gezegenin varlığını varsayan Adams(1819-1892) ve Le Verrier(1811-1872), üç şekilli bir problemin oluşturulmasındaki perturbasyon teoreminin ters bir problemini çözmüşlerdir: bilinen pertürbasyonların bilinmeyen bir şeklin kütlesini ve yörüngesini bulmak için.23 Eylül 1846'da yeni gezegen başarılı bir şekilde keşfedildi.

Sonra, 1915'te 'sadece kalem ve kağıt' yoluyla Lowell yeni bir gezegen olan Pluton'un haberini verdi.13 Mart 1930'da K.Tombo incelenen keşfini ilan etti.

2.2 Lindstedt-Poincaré Metodu[2,3]

Uygulamada, hesap ve zaman faktörleri genellikle terimlerin sadece küçük bir sayısını düşünmemiz için bizi zorlar.Bu yüzden tek geçerli çözüm sağlamak için seküler terimleri ortadan kaldıracak bir yaklaşıma ihtiyaç vardır.Seküler terimlerden kurtulmak için Lindstedt tarafından bir metod verilmiştir.Sonradan Poincaré, Lindstedt'in metodu tarafından sağlanan genişlemelerin asimtotik ve tek geçerli olduklarını kanıtlamıştır.

Aşağıdaki genel denklemi düşünelim:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u + \mathcal{E}f(u, u') = 0, \quad (2.2.1)$$

ve başlangıç koşulları

$$u(0) = A, u'(0) = 0 \quad (2.2.2)$$

dır.

Bu metodun özü bağımsız değişkenin bir dönüşümünü belirlemektir. Bu dönüşüm seküler terimleri önlememizi sağlayacaktır. Standart Lindstedt-Poincaré metodunun temel düşüncesi yeni bir değişken belirlemektir.

$$r = \omega(\varepsilon)t, \quad (2.2.3)$$

Burada ω , ε 'un bilinmeyen bir fonksiyonu olan sistemin frekansıdır.

Denklem (2.2.1)'den

$$\omega^2 u'' + u + \mathcal{E}f(u) = 0, \quad (2.2.4)$$

elde edilir. Burada üsler r 'ye göre türevi gösterir. Hem çözüm hem de frekans ε 'nin kuvvetlerinde açılır ve (2.2.5) ve (2.2.6) elde edilir.

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \quad (2.2.5)$$

$$\omega = 1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots, \quad (2.2.6)$$

(2.2.5) ve (2.2.6) denklemlerini (2.2.1)'de yerine koyarsak ve ε 'nin benzer kuvvetlerinin katsayılarını eşitlersek lineer denklemlerin serisini

$$u'' + u_0 = 0, \quad (2.2.7)$$

$$u_1'' + u_1 + 2\omega_1 u_0'' + f(u_0, u_0') = 0, \quad (2.2.8)$$

elde ederiz.

(2.2.2) başlangıç koşulları

$$u_0(0) = A, u_0'(0) = 0, \quad (i=1,2,3,\dots) \quad (2.2.9)$$

olur ve

$$u_i(0) = 0, u_i'(0) = 0 \quad (2.2.10)$$

u_i ve ω_i ($i=0,1,2,3,\dots$) ardı ardına çözülebilir.

Şimdi aşağıdaki denklemi tekrar düşünelim:

$$u_0'' + (1 + \varepsilon)u = 0, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (2.2.11)$$

başlangıç koşulları $u(0) = A, u'(0) = 0$ dir.

Eğer (2.2.11)'deki yeni bağımsız değişken $r = \omega(\varepsilon)t$ yi değiştirirsek ve ε 'nin kuvvetlerine açarsak, çözmek için aşağıdaki homojen olmayan lineer diferansiyel denklemleri elde ederiz.

$$u_0'' + u_0 = 0, \quad u_0(0) = A, \quad (2.2.12)$$

$$u_1'' + u_1 + 2\omega_1 u_0'' + u_0 = 0, \quad u_1(0) = 0, \quad u_1'(0) = 0. \quad (2.2.13)$$

(2.2.12) denkleminin çözümü $u_0 = A \cos r$ 'dir. Bu sonucu (2.2.13)

denkleminde yerine koyarsak

$$u_1'' + u_1 + (1 - 2\omega_1)A \cos r = 0 \quad (2.2.14)$$

denklemini elde ederiz.

u_1 'deki seküler terimleri yoketmek için ,(2.2.14)ün sağ tarafında $\cos r$ nin katsayısını yok etmek için ω_1 seçilir. Bu koşul ω_1 'i $\frac{1}{2}$ olarak

belirler. Yani

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \text{ 'dir} \quad (2.2.15)$$

Sonra (2.2.14)'ün çözümü

$$u_1 = 0 \quad (2.2.16)$$

olur. Böylece, ilk yaklaşıma göre (2.2.11) için çözüm (2.2.17) olur.

$$u = A \cos\left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon\right)t \quad (2.2.17)$$

Standart Lindstedt-Poincaré metodu sadece zayıf nonlinear problem için geçerlidir, aşağıdaki durumlar için çalışmaz.

1) Damping ile salınım. Bu metod aşağıdaki basit lineer damping denklemi için uygun değildir.

$$u'' + 2\varepsilon u' + u = 0, \quad u(0) = A, \quad u'(0) = 0, \quad (2.2.18)$$

2) Lineer terimsiz. Örneğin; bu metod aşağıdaki denklemi çözmez.

$$u'' + \varepsilon u^{2n+1} = 0, \quad u(0) = A, \quad u'(0) = 0, \quad (2.2.19)$$

3) Lineer terimin katsayısı negatiftir. Örneğin ;

$$u'' - c^2 u + \beta u^3 = 0, \quad u(0) = A, \quad u'(0) = 0 \quad (2.2.20)$$

denklemini düşünelim. A, salınının genişliği olmak üzere, $\varepsilon A^2 > 2c^2$ ise teorik analiz yukarıdaki denklemin bir periyot çözüme sahip olduğunu söyler.

4) Nonlinear denklemler. Örneğin;

$$u'' u + 1 = 0, \quad u(0) = A, \quad u'(0) = 0 \quad (2.2.21)$$

Standart Lindstedt-Poincaré metodunun ötesinde ,gelecek bölümde Lindstedt-Poincaré metodunun modifiye edilmişini göreceğiz.

2.3. Modifiye Lindstedt-Poincare Metodu: Bir sabitin açılımı [4]

Lindstedt-Poincare metodu zayıf lineer olmayan salınımların periyodik çözümleri için tek geçerli asimtotik açılım verir, genelde bu metod güçlü lineer olmayan terimler olduğunda çalışmaz.

Refs[5,6]'da , ω 'nın yerine ω^2 yazılırsa perturbasyonun sonuçları daha düzenli olabilir.

$$\omega^2 = 1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots \quad (2.3.1)$$

Bu bölümde,(2.3.2) lineer olmayan diferansiyel denklemin tek geçirli çözümlerinin olması için bir modifiye Lindstedt-Poincaré metodu vereceğiz.

$$u'' + bu + \varepsilon f(u, u') = 0 \quad (2.3.2)$$

Burada b bir sabit,sıfır hatta tek sayı da olabilir, f nonlineer bir fonksiyon ve $0 < \varepsilon < \infty$ dur.

$\varepsilon = 0$ olduğunda

$$u'' + bu = 0 \quad (2.3.3)$$

elde edilir.

b pozitif olduğunda frekans ε 'dan bağımsız olan \sqrt{b} ' dir.

$b \leq 0$ olduğunda,yaklaşımımızda bir kısıtlama olmamasına rağmen klasik Lindstedt-Poincaré metodu geçerli değildir.

(2.3.2) sistemin frekansını ω kabul edersek,

$$u'' + \omega^2 u = 0 \quad (2.3.4)$$

denklemini elde ederiz.

Burada bilinmeyen frekans ω daha iyi tanımlanır. Çözüm serilerinde (2.3.4)ün çözümü u_0 ilk teriminin yerini alır.Bunu sonlandırmak için u_0 'ın sağladığı denklemin

$$u_0'' + \omega^2 u_0 = 0 \quad (2.3.5)$$

formunda olduğunu garanti etmeliyiz.

Modifiye Lindstedt-Poincaré metodunun özü, hem çözümü hem de u 'nun katsayısı b'yi ε 'un kuvvetlerinde açmaktır.

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \quad (2.3.6)$$

$$b = \omega^2 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots, \quad (2.3.7)$$

Burada ω ve ω_i bilinmeyen sabitlerdir.

(2.3.6) ve (2.3.7)'yi (2.3.2) de yerine koyarsak ε 'un çeşitli kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitlersek

$$u_0'' + \omega^2 u_0 = 0, u_0(0) = A, u_0'(0) = 0, \quad (2.3.8)$$

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + \omega_1 u_0 + f(u_0, u_0') = 0, u_1(0) = 0, u_1'(0) = 0 \quad (2.3.9)$$

denklemlerini elde ederiz.

$b \leq 0$ olduğunda, u_0 baş terimi (2.3.8) ile çözülebilir. ω_i bilinmeyen sabitler, u_i de seküler olmayan terimler altında bulunabilir. Temel işlemi açıklamak için aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

Örnek 1

Bilyeli rulmanla salınımın hareketini şu şekilde verebiliriz[7].

Sürtünmeyle ortaya çıkan kayıplar göz ardı edilerek düzenlenen denklem

$$u'' + \varepsilon u^3 = 0, u(0) = A, u'(0) = 0 \quad (2.3.10)$$

tır.

Standart Poincaré metodu bu örnek için çalışmaz. Şimdi (2.3.10) denklemini aşağıdaki şekilde tekrar yazalım.

$$u'' + 0 \cdot u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (2.3.11)$$

ε 'un kuvvetlerinde lineer terimin katsayısını ve çözümünü açalım.

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \quad (2.2.12)$$

$$0 = \omega^2 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots, \quad (2.3.13)$$

(2.3.12) ve (2.3.13)'ü (2.3.11)'de yerine koyalım ve standart pertürbasyon metodunu uygularsak,

$$u_0'' + \omega^2 u_0 = 0, u_0(0) = A, u_0'(0) = 0 \quad (2.3.14)$$

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + \omega_1 u_0 + u_0^3 = 0, \quad (2.3.15)$$

$$u_0'' + \omega^2 u_2 + \omega_2 u_0 + \omega_1 u_1 + 3u_0^2 u_1 = 0, \quad (2.3.16)$$

homojen olmayan lineer diferansiyel denklemleri elde ederiz ve u_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) için başlangıç koşulları

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) = 0, \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(0) = 0 \quad (2.3.17)$$

dir.

(2.3.14) denklemini çözersek,

$$u_0 = A \cos \omega t \quad (2.3.18)$$

denklemini elde ederiz. (2.3.15)'de u_0 'ı yerine koyarsak

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + A(\omega_1 + \frac{3}{4}A^2) \cos \omega t + \frac{1}{4}A^3 \cos 3\omega t = 0 \quad (2.3.19)$$

olur.

Not: $\omega_1 + \frac{3}{4}A^2 = 0$ olmazsa, (2.3.19) denkleminin her çözümü bir seküler

terim içerecektir.

Böylece

$$\omega_1 = -\frac{3}{4}A^2 \quad (2.3.20)$$

olur ve (2.3.19) denkleminde $\cos \omega t$ terimini yok ederiz. Bu koşulla

(2.3.19) denklemi

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + \frac{1}{4}A^3 \cos 3\omega t = 0 \quad (2.3.21)$$

olur. (2.3.21)'in özel çözümü

$$u_1 = \frac{A^3}{32\omega^2} \cos 3\omega t \quad (2.3.22)$$

olur.

(2.3.18) ve (2.3.22) denklemlerini (2.3.16)'da yerine koyarsak, u_2 'in sağladığı

$$u_2'' + \omega^2 u_2 + A(\omega_2 + \frac{3A^4}{128\omega^2}) \cos \omega t + \frac{A^3(2\omega_1 + 3A^2)}{64\omega^2} \cos 3\omega t + \frac{3A^5}{128\omega^2} \cos 5\omega t = 0 \quad (2.3.23)$$

denklemini elde ederiz.

$\cos \omega t$ 'in katsayısı sıfır olmazsa, denklemdeki üçüncü ifade bir seküler terim olabilir.

Seküler terimlerin olmama koşulundan, ω_2 yi tanımlayabiliriz

$$\omega_2 = -\frac{3A^4}{128\omega^2} \quad (2.3.24)$$

Sadece birinci derece yaklaşık çözüm aranırsa,

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 = A \cos \omega t + \frac{\varepsilon A^3}{32\omega^2} (\cos 3\omega t - \cos \omega t) \quad (2.3.25)$$

elde ederiz.

Burada frekans ω 'yi (2.3.26)'dan (2.3.27) olarak belirleyebiliriz.

$$0 = \omega^2 + \varepsilon \omega_1 = \omega^2 - \frac{3}{4} \varepsilon A^2 \quad (2.3.26)$$

$$\omega = \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon^{1/2} A \quad (2.3.27)$$

Denklemin periyodu

$$T = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \varepsilon^{-1/2} A^{-1} = 7.25 \varepsilon^{-1/2} A^{-1} \quad (2.3.28)$$

olarak yazılabilir.

Tam periyot ,

$$T_{tam} = 6.743 \varepsilon^{-1/2} A^{-1} \quad (2.3.29)$$

olarak bulunabilir.

Maksimum hatanın %7.5 'ten az olduğu aşıkardır ve elde edilen yaklaşık periyot her $\varepsilon > 0$ için geçerlidir.

İkinci mertebeden yaklaşık frekansı elde etmek için (2.3.20) ve (2.3.24)ü (2.3.13)de yerlerine koyalım.

$$0 = \omega^2 - \frac{3}{4}\varepsilon A^2 - \frac{3\varepsilon^2 A^4}{128\omega^2} \quad (2.3.30)$$

veya kolayca

$$\omega = 0.8832\varepsilon^{1/2} A \quad (2.3.31)$$

olur.

İkinci derece periyot

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 7.114\varepsilon^{-1/2} A^{-1} \quad (2.3.32)$$

olur.

Şimdi periyodun doğruluğu %5.2'ye ulaşır.

Yüksek mertebeden yaklaşık çözüm daha yüksek periyotlu bağıl hataya sebep olmasına rağmen, genlik için hata daha da genişleyebilir.(2.3.25) denkleminde birinci mertebe yaklaşık çözüm yerine, daima sıfır mertebe yaklaşık çözümü kullanır.

$$u(t) = A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon^{1/2} A\right)t \quad (2.3.33a)$$

veya

$$u(t) = A \cos(0.8832\varepsilon^{1/2} A)t \quad (2.3.33b)$$

olarak bulunur.

Örnek 2

Şimdi duffing salınıminı düşünelim.

$$u'' + 1.u + \varepsilon u^3 = 0, u(0) = A, u'(0) = 0 \quad (2.3.34)$$

Önceki örnekte, lineer terimin katsayısını ve çözümünü ε 'un kuvvetlerinde açmıştık.

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \quad (2.3.35)$$

$$1 = \omega^2 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots, \quad (2.3.36)$$

Çözüm yöntemi önceki örnekte açıklanana benzerdir.

u_1 de seküler terimin olmaması koşulu

$$\omega_1 = -\frac{3}{4}A^2 \quad (2.3.37)$$

sonucunu verir.

Birinci mertebe yaklaşık çözümü (2.3.36)da kullanırsak

$$1 = \omega^2 - \frac{3}{4}\varepsilon A^2 \quad (2.3.38)$$

elde ederiz.

(2.3.38)den frekansı kolayca bulabiliriz,böylece sıfır mertebe yaklaşık çözüm

$$u = A \cos\left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon A^2\right)^{1/2} t \quad (2.3.39)$$

olur.

Örnek 3

Şimdi lineer terimin katsayısı negatif olan

$$u'' - c^2 u + \varepsilon u^3 = 0, u(0) = A, u'(0) = 0 \quad (2.3.40)$$

denklemini alalım.Amacımız, periyot çözümün olduğu zamanki koşulları bulmaktır.

Buradaki ω_i , u_i 'deki seküler terimlerin olmamasından belirlenebilir

$$-c^2 = \omega^2 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots, \quad (2.3.41)$$

Yukarıda anlatılan şekilde devam edersek

$$\omega_1 = -\frac{3}{4}A^2 \quad (2.3.42)$$

denklemini elde ederiz.

Böylece frekans

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{4}\varepsilon A^2 - c^2} \quad (2.3.43)$$

olarak ifade edilir.

$$\varepsilon A^2 > \frac{4}{3}c^2 \quad (2.3.44)$$

olduğunda bir periyodik çözüm var olur.

Farklı analizler (2.3.40) denkleminin periyodik çözümünün $\varepsilon A^2 > 2c^2$

olduğunu gösterir.

Örnek 4

Şimdi diğer örnek olarak,

$$u'' + \frac{u}{1 + \varepsilon u^2} = 0 \quad (2.3.45)$$

denklemini $u(0) = A$ ve $u'(0) = 0$ başlangıç koşulları ile düşünelim. (2.3.45)

denklemini yeniden aşağıdaki gibi tekrar yazalım.

$$u'' + 1.u + \varepsilon u''u^2 = 0 \quad (2.3.46)$$

önceki örneklerde lineer terimin katsayısı 1, ε 'un kuvvetlerinde açılmıştı;

$$1 = \omega^2 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots, \quad (2.3.47)$$

u_0 ve u_1

$$u_0'' + \omega^2 u_0 = 0, u_0(0) = A, u_0'(0) = 0 \quad (2.3.48)$$

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + \omega_1 u_0 + u_0'' u_0^2 = 0, u_1(0) = 0, u_1'(0) = 0 \quad (2.3.49)$$

denklemlerini sağlar.

(2.3.48)'in çözümü $u_0 = A \cos \omega t$ 'dir. Bu sonuç (2.3.49)da yerine konulursa ve u_1 deki seküler terimler yok edilir.

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{4} \varepsilon A^2}} \quad (2.3.50)$$

elde edilir. Böylece yaklaşık çözüm

$$u(t) = A \cos\left(1 + \frac{3}{4} \varepsilon A^2\right)^{-1/2} t \quad (2.3.51)$$

olur, ε 'un küçük değerleri için

$$\omega = 1 - \frac{3}{8} \varepsilon A^2 \quad (2.3.52)$$

olur.

Sonuç olarak bu metod standart pertürbasyonlar[2,8]'la benzer sonuçlar verir. Elde edilen sonuçların göze çarpan doğruluğunu açıklamak için yaklaşık periyot

$$T = 2\pi \sqrt{1 + \frac{3}{4} \varepsilon A^2} \quad (2.3.53)$$

denklemini, tam çözüm

$$T = 4\sqrt{\varepsilon} \int_0^A \frac{du}{\sqrt{\ln(1 + \varepsilon A^2) - \ln(1 + \varepsilon u^2)}} = 4\sqrt{3} \int_0^A \frac{du}{\sqrt{\ln[(1 + \varepsilon A^2)/(1 + \varepsilon u^2)]}} \quad (2.3.54)$$

ile karşılaştıralım. $\varepsilon A^2 \rightarrow \infty$ olduğunda (2.3.54) denklemi

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon A^2 \rightarrow \infty} T &= 4\sqrt{\varepsilon} \int_0^A \frac{du}{\sqrt{2(\ln A - \ln u)}} = 2\sqrt{2\varepsilon} A \int_0^A \frac{du}{\sqrt{\ln(1/s)}} \\ &= 4\sqrt{2\varepsilon} A \int_0^\infty \exp(-x^2) dx = 2\sqrt{2\pi\varepsilon} A \end{aligned} \quad (2.3.55)$$

denklemine indirgenir.

ε 'un büyük değerleri için,

$$T \approx \sqrt{3}A \quad (2.3.56)$$

olur.

$\varepsilon \gg 1$ için (2.3.53) yaklaşık periyodu tam periyoda benzerdir.

$\varepsilon \rightarrow \infty$ olduğunda,

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{T_{tam}}{T} = \frac{2\sqrt{2\pi\varepsilon A}}{\sqrt{3\varepsilon\pi A}} = 0.9213 \quad (2.3.57)$$

Böylece ε 'un her değeri için maksimum relatif hatanın %8.54'ten küçük olduğu kolayca görülebilir, tüm çözüm aralığı $0 < \varepsilon < \infty$ dur.

Örnek 5

Aşağıdaki salınımı düşünelim:

$$\varepsilon u''u + 1 = 0, u(0) = A, u'(0) = 0 \quad (2.3.58)$$

Şimdi (2.3.58) denklemini tekrar yazalım.

$$u'' + 0.u + \varepsilon u''^2 u = 0 \quad (2.3.59)$$

Lineer terimin katsayısını ve çözümünü ε 'un kuvvetlerinde açalım.

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \quad (2.3.60)$$

$$0 = \omega^2 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots, \quad (2.3.61)$$

(2.3.60) ve (2.3.61) i (2.3.59)da yerine koyarsak ve önceki örnekler gibi

uygularsak, u_0 ve u_1 için

$$u_0'' + \omega^2 u_0 = 0, \quad u_0(0) = A, \quad u_0'(0) = 0, \quad (2.3.62)$$

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + \omega_1 u_0 + u_0''^2 u_0 = 0, \quad u_1(0) = 0, \quad u_1'(0) = 0, \quad (2.3.63)$$

diferansiyel denklemlerini elde ederiz.

(2.3.62)'nin çözümü $u_0 = A \cos \omega t$ dir.(2.3.63) denkleminde u_0 'ı yerine

koyarsak

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + A(\omega_1 + \frac{3}{4}\omega^4 A^2) \cos \omega t + \frac{1}{4}\omega^4 A^3 \cos 3\omega t = 0 \quad (2.3.64)$$

olur.

u_1 'de seküler terim olmaması için

$$\omega_1 = -\frac{3}{4}\omega^4 A^2 \quad (2.3.65)$$

olur.

Daima birinci merteye yaklaşık çözümde dururuz. Bu koşulla (2.3.61)

denklemini

$$0 = \omega^2 - \frac{3}{4}\varepsilon\omega^4 A^2 \quad (2.3.66)$$

olur.

Böylece

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon^{-1/2} A^{-1} = 1.1547\varepsilon^{-1/2} A^{-1} \quad (2.3.67)$$

olur.

Tam frekans $\omega_{tam} = \varepsilon^{-1/2} A^{-1} = 1.2533\varepsilon^{-1/2} A^{-1}$, doğruluk %7.8 olur.

Sıfır merteye yaklaşık çözüm

$$u = A \cos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon^{-1/2} A^{-1} t\right) \quad (2.3.68)$$

olur.

Bazı özel salınımlar için bu metoda başvurulabilir. Örneğin; aşağıdaki

denklemini düşünelim.

$$u'' + ue^{\varepsilon u} = 0 \quad (2.3.69)$$

(2.3.69) denklemini aşağıdaki gibi tekrar yazalım.

$$u'' + 0.u + u\varepsilon^{\varepsilon u} = 0 \quad (2.3.70)$$

Katsayı 0,(2.3.61) formunda ifade edilir.

(2.3.61) denklemindeki sabit ω_1 seküler terimleri yok ederek

$$\int_0^T A \cos \omega t \{ \omega_1 A \cos \omega t + A \cos \omega t \exp(A \cos \omega t) \} dt = 0 \quad (2.3.72)$$

elde edilir.

Burada $T = 2\pi/\omega$ 'dur.

ω_1 , (2.3.72)'den bazı özel fonksiyonlar tarafından açıkça tanımlanabilir.

2.4 Modifiye Lindstedt-Poincare Metodu :Bir yeni dönüşüm [9]

Bu bölümde,Standart Lindstedt-Poincaré metodunun diğer modifikasyonunu inceleyeceğiz 1990'da Dai et al.[10,11,12] bağımsız değişkeninin başka dönüşümünü sundu.Bu ana fikri açıklamak için, ilk önce aşağıdaki lineer olmayan denklemini düşünelim:

$$L[u(t)] + \varepsilon N[u(t)] = 0, t \in \Omega, \quad (2.4.1)$$

$$B[u(t)] = g(t), t \in \partial\Omega, \quad (2.4.2)$$

Burada L ve N sırasıyla lineer ve lineer olmayan operatörlerdir,B sınır operatörüdür.

Ref[10-12] yi doğrularak,aşağıdaki denklemini sunabiliriz.

$$u = u(r) + O(\varepsilon^2), \quad (2.4.3)$$

$$t = r + \varepsilon F[u(r)] + O(\varepsilon^2), \quad \{F[u(r)]\}_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.4.4)$$

Burada $F[u(r)]$ daha sonra tanımlanacak olan bilinmeyen nonlineer fonksiyoneldir.

(2.4.4) dönüşümü altında (2.4.1) ve (2.4.2) denklemleri

$$L[u(r)] + \varepsilon \{L_1[u(r), F] + N[u(r)]\} + O(\varepsilon^2) = 0, r \in \Omega, \quad (2.4.5)$$

$$B[u(r)] = g(r), r \in \partial\Omega, \quad (2.4.6)$$

olur. Burada L_1 hesaplanarak elde edilen operatördür.

Asimtotik lineerleşmenin uygunluğu kullanılarak, $O(\varepsilon)$ için örneğin (2.4.5)

ve (2.4.6) denklemleri lineerleştirilim:

$$L_1[u(r), F] + N[u(r)] = 0, r \in \Omega \quad (2.4.7)$$

$$F[u(r)] = 0, r \in \partial\Omega, \quad (2.4.8)$$

O zaman, (2.4.5) ve (2.4.6) denklemleri asimtotik olarak lineerleştirilmiş olan aşağıdaki denkleme indirgenir.

$$L[u(r)] = 0, r \in \Omega, \quad (2.4.9)$$

$$B[u(r)] = g(r), r \in \partial\Omega, \quad (2.4.10)$$

(2.4.7) ve (2.4.8) denklemlerinden fonksiyonel F tanımlanabilir ve (2.4.9) ve (2.4.10)'dan $u(r)$ çözülebilir. (2.4.3) ve (2.4.4) dönüşümlerine göre, ε 'un doğruluğu için (2.4.1) ve (2.4.2) denklemlerinin çözümü elde edilir.

Dai's metodu daha geniştir.

Standart Lindstedt-Poincaré metodunun dönüşümünü [5,6,9]

formunda tekrar yazabiliriz.

$$r = t + f(\varepsilon, t), \quad f(0, t) = 0, \quad (2.4.11)$$

Burada $f(\varepsilon, t)$ bilinmeyen bir fonksiyondur, fonksiyonel değildir. Dönüşümümüz (2.4.4) dekleminden daha kolaydır. Bilinmeyen f fonksiyonunun tanımının, Dai's metodundaki bilinmeyen fonksiyonel F 'den çok daha kolay olduğunu aşağıdaki örneklerle görebiliriz.

(2.4.11)'den

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(1 + \frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = G \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \quad (2.4.12)$$

olur. Burada

$$G(\varepsilon, t) = \left(1 + \frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 \quad (2.4.13)$$

tür. Taylor serisinden yararlanarak

$$G(\varepsilon, t) = G_0 + \varepsilon G_1 + \dots, \quad (2.4.14)$$

yazabiliriz. Burada $G_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ seküler terimleri yok ederek tanımlanır. $G_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ 'nin tanımından sonra (2.4.13) denkleminde bilinmeyen f fonksiyonu çözülebilir.

(2.4.11) dönüşümü daha da kolaylaştırılarak

$$r = f(t, \varepsilon), \quad f(t, 0) = t \quad (2.4.15)$$

yazılabilir. Böylece

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \quad (2.4.16)$$

olur. ε 'un serisinde $(\partial f / \partial t)^2$ 'yi açalım:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots, \quad (2.4.17)$$

Duffing denklemini düşünelim.(2.4.15) dönüşümünden

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + u + \varepsilon u^3 = 0, \quad (2.4.18)$$

olur.

Klasik Lindstedt-Poincaré metodunu uygulayarak u_0 ve u_1 için

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + u_0 = 0, u_0(0) = A, u_0'(0) = 0, \quad (2.4.19)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + u_1 + f_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + u_0^3 = 0, u_1(0) = 0, u_1'(0) = 0 \quad (2.4.20)$$

elde edilir. u_1 'de seküler terim olmama koşulundan

$$f_1 = \frac{3}{4} A^2 \quad (2.4.21)$$

olur.(2.4.17)'den

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 = 1 + \frac{3}{4}\varepsilon A^2 \quad (2.4.22)$$

$$\text{veya } \frac{\partial f}{\partial t} = \sqrt{1 + \frac{3}{4}\varepsilon A^2} \quad (2.4.23)$$

elde edilir.

Sıfır merteye yaklaşık çözüm

$$u = A \cos r = A \cos f = A \cos\left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon A^2\right)^{1/2} t \quad (2.4.25)$$

olarak yazılabilir.

Şimdi Lighthill denklemini düşünelim, bu denklem PLK metodu (Poincaré-Lighthill-Kuo Metodu) tarafından geniş biçimde çalışılmıştır.

$$(x + \varepsilon y) \frac{dy}{dx} + y = 0, x \in [0, 1], y(1) = 1 \quad (2.4.26)$$

$$x = f(\xi, \varepsilon), f(\xi, 0) = x, \quad (2.4.27)$$

dönüşümü ile (2.4.26) denklemini

$$(f + \varepsilon y) \frac{dy}{d\xi} + y \frac{df}{d\xi} = 0 \quad (2.4.28)$$

olur.

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots, \quad (2.4.29)$$

$$\text{ve } f = \xi + \varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2 + \dots, \quad (2.4.30)$$

kabul edelim.

Standart perturbasyon metoduna benzer işlemler uygulanırsa,

$$\xi \frac{dy_0}{d\xi} + y_0 = 0, y_0(0) = 1, \quad (2.4.31)$$

$$\xi \frac{dy_1}{d\xi} + y_1 + \xi_1 \frac{dy_0}{d\xi} + y_0 \frac{dy_0}{d\xi} + y_0 f_1 = 0, y_1(0) = 0 \quad (2.4.32)$$

elde edilir.

(2.4.31) denkleminin çözümü

$$y_0 = \frac{1}{\xi} \quad (2.4.33)$$

tür.(2.4.32)'de (2.4.33)'ü yerine koyarsak,

$$\xi \frac{dy_1}{d\xi} + y_1 - \frac{1}{\xi^2} \xi_1 - \frac{1}{\xi^3} + \frac{1}{y_0} f_1 = 0 \quad (2.4.34)$$

elde ederiz.Böylece

$$-\frac{1}{\xi^2} \xi_1 - \frac{1}{\xi^3} + \frac{1}{\xi} f_1 = 0 \quad (2.4.35)$$

$$\text{veya } f_1 = \frac{1 + \xi \xi_1}{\xi^2} \quad (2.4.36)$$

olur.

Diferansiyel denklem y_1 için, $y_1(0) = 0$ başlangıç koşuluyla çözülürse,

$$y_1 = 0 \quad (2.4.37)$$

bulunur.

(2.4.29)'da f_1 'i yerine koyarsak ,

$$\frac{df}{d\xi} = 1 + \mathcal{E}f_1 = 1 + \frac{\mathcal{E}}{\xi^2} (1 + \xi \xi_1) = 1 + \frac{\mathcal{E}}{\xi^2} + \frac{1}{\xi} (f - \xi) \quad (2.4.38)$$

elde ederiz.

(2.4.38)'i düzenlersek,

$$\xi \frac{df}{d\xi} - f = \frac{\mathcal{E}}{\xi} \quad (2.4.39)$$

olur.

$$x = f = \xi + \frac{1}{2} \mathcal{E} \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right) \quad (2.4.40)$$

sonuç ve

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 = \frac{1}{\xi} = \frac{1}{\varepsilon} \left[-x + \sqrt{x^2 + (2 + \varepsilon)\varepsilon} \right] \quad (2.4.41)$$

tam çözüm olur.

Şimdi van der Pol denklemini $u(0) = a$ ve $u'(0) = 0$ başlangıç

koşullarıyla düşünelim:

$$u'' + u = \varepsilon(1 - u^2)u' \quad (2.4.42)$$

$r = f(t, \varepsilon)$ dönüşümüyle, (2.4.42) denklemi

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + u = \varepsilon(1 - u^2) \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (2.4.43)$$

olur.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{\omega^2} \quad (2.4.44)$$

ile tanımlanan ω 'ı yeni bir değişken olarak kabul edelim. Böylece (2.4.43) denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \omega^2 u = \varepsilon \omega (1 - u^2) \frac{\partial u}{\partial r} \quad (2.4.45)$$

olur.

$$\omega^2 = 1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots, \quad (2.4.46)$$

$$\text{veya } \omega = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon \omega_1 + \frac{1}{6} \varepsilon^2 (\omega_2 - \frac{1}{4} \omega_1^2) + \dots, \quad (2.4.47)$$

olarak kabul edelim.

u_0, u_1 ve u_2 için aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$u_0'' + u_0 = 0, \quad u_0(0) = A, \quad u_0'(0) = 0, \quad (2.4.48)$$

$$u_1'' + u_1 = -\omega_1 u_0 + (1 - u_0^2) u_0' \quad (2.4.49)$$

$$u_2'' + u_2 = -\omega_1 u_1 - \omega_2 u_0 + (1 - u_0^2) u_1' + \frac{1}{2} (1 - u_0^2) \omega_1 u_0' - 2u_0 u_1 u_0' \quad (2.4.50)$$

(2.4.48)'in çözümü $u_0 = a \cos r$ 'yi (2.4.49)da yerine koyarsak,

$$u_1'' + u_1 = -a\omega_1 \cos r - a(1 - a^2 \cos^2 r) \sin r = -a\omega_1 \cos r + \left(\frac{a^3}{4} - a\right) \sin r + \frac{a^3}{4} \sin 3r \quad (2.4.51)$$

olur. u_1 'de seküler terim olmama koşuluna göre

$$\omega_1 = 0, a = 2 \quad (2.4.52)$$

olur. u_1 için özel çözüm

$$-\frac{a^3}{32} \sin 3r = -\frac{1}{4} \sin 3r \quad (2.4.53)$$

olur.

u_0 ve u_1 'i (2.4.50)'de yerine koyarsak,

$$u_2'' + u_2 = -2\omega_2 \cos r - \frac{3}{4}(1 - 4 \cos^2 r) \cos 3r - \sin 2r \sin 3r = -(2\omega_2 - \frac{1}{4}) \cos r + \frac{3}{4} \cos 3r + \frac{5}{4} \cos 5r \quad (2.4.54)$$

elde ederiz.

u_2 'deki seküler terimleri yok edersek,

$$\omega_2 = \frac{1}{8} \quad (2.4.55)$$

olur.

Eğer ikinci merteye yaklaşık çözüm yeterliyse ,(2.4.46)'dan

$$\omega^2 = 1 + \frac{1}{8} \varepsilon^2 \quad (2.4.56)$$

olur.(2.4.44)'den

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{8} \varepsilon^2} \quad (2.4.57)$$

olur.

(2.4.57) denkleminin çözümü $f(t,0) = t$ koşuluyla

$$r = f = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{8}\varepsilon^2}} \quad (2.4.58)$$

olur. Periyodu ise

$$T = 2\pi \sqrt{1 + \frac{1}{8}\varepsilon^2} \quad (2.4.59)$$

olarak ifade edilebilir.

$\varepsilon \gg 1$ olduğunda, sonuçların standart perturbasyon metolarından [2,3] de elde edilenlerle aynı olduğu aşikardır.

ε 'un çok büyük değerleri için, tam periyot [8]'un aşağıdaki yaklaşımını elde ederiz.

$$T_{tam} \approx 2\varepsilon \int_{2/\sqrt{3}}^{4/\sqrt{3}} \left(\frac{dv}{v} - 3v dv \right) = 1.614\varepsilon, (\varepsilon \gg 1) \quad (2.4.60)$$

(2.4.59) denkleminde

$$T \approx \frac{\pi}{\sqrt{2}} \varepsilon = 2.22\varepsilon, (\varepsilon \gg 1) \quad (2.4.61)$$

olur.

Çok büyük ε 'lar için yaklaşık periyodun tam çözüme benzediği aşikardır. MATHEMATİCA'dan yüksek mertebe yaklaşımları elde edebiliriz.

2.5 Modifiye Lindsted Poincare' Metodu: İkili Seri Açılımı [13,14]

Önceki bölümlerde, Standart Lindsted Poincaré metodunun iki modifikasyonunu inceledik. Bazen , sistemde iki açılımlı parametreler vardır. Bu bölümde kuadratik ve kübik nonlineerleşmesiyle bir nonlineer salınımın serbest salınımı inceleyeceğiz. Buna örnek şu şekildedir.

$$u'' + 1.u + \varepsilon_1 u^2 + \varepsilon_2 u^3 = 0, \quad u(0) = 0, u'(0) = 0, \quad (2.5.1)$$

Burada ε_1 ve ε_2 sabitlerdir, şimdi bu sabitlerin küçük olmalarına gerek olmadığını inceleyelim.

(2.5.1) denkleminde iki parametre vardır ve parametrelerin küçük değerlerinde geleneksel perturbasyon tekniklerine başvurulamaz. Bunun yerine (2.5.1) denklemi için küçük fakat sonlu amplitütlerle straightforward açılımı yapabiliriz, Bunun için bu denklemde açıkça görülmeyen küçük bir parametre tanımlamaya ihtiyaç duyarız. Bu sonuç için, Nayfeh [13,14] formunda bir açılım araştırılır.

$$u = pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \dots, \quad (2.5.2)$$

Burada p salınımların amplitüdünün bir ölçüsü olan küçük boyutsuz bir parametredir. Eğer amplitüt çok küçük alınırsa, bu parametre bire eşit alınır ve seriyi buna göre düzenleriz. Farklı Nayfeh yaklaşımı, aşağıdaki formlarda [13,14] çözüm ve katsayılar (ε_1 ve ε_2) açılır.

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots, \quad (2.5.3)$$

$$1 = \omega^2 + pc_1 + p^2c_2 + \dots, \quad (2.5.4)$$

$$\varepsilon_1 = pa_1 + p^2a_2 + \dots, \quad (2.5.5)$$

$$\varepsilon_2 = p^2b_1 + p^3b_2 + \dots, \quad (2.5.6)$$

Burada a_i, b_i ve c_i tanımlanır. Basit manipülasyon asimptotik çözümü kolayca elde edebiliriz. Bu nedenle biz sadece birinci mertebe frekansı [13] yazalım.

$$\omega = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{4}\varepsilon_2 A^2 + \sqrt{\left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon_2 A^2\right) - \frac{10}{3}\varepsilon_1^2 A^2}}{2}} \quad (2.5.7)$$

Aziz ve Na[15],iki küçük parametreler örneğin küçük ε_1 ve ε_2 de u için asimptotik yaklaşımla nonlinear denklemler için bir ikili seri açılımı sunar.

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^j a^{j-i} b^i u_{i,j-1} \quad (2.5.8)$$

Açıktır ki yüksek mertebeden terimlerdeki seküler terimlerden dolayı straightforward açılımı başarısız olacaktır. Bunu engellemek için (2.5.1) denkleminin çözümü için ikili seri açılımı [13,14]

$$u = u_0 + \varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \varepsilon_1^2 u_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 u_4 + \varepsilon_2^2 u_5 + \dots, \quad (2.5.9)$$

kullanırız.

$u_i (i \geq 1)$ 'deki seküler terimlerden kurtulmak için (2.5.1)

denklemindeki 1 katsayısını açarız.

$$1 = \omega^2 + \varepsilon_1 \omega_1 + \varepsilon_2 \omega_2 + \varepsilon_1^2 \omega_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \omega_4 + \varepsilon_2^2 \omega_5 + \dots, \quad (2.5.10)$$

(2.5.9) ve (2.5.10) denklemlerini (2.5.1) denkleminde yerine koyarsak, aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$u_0'' + \omega^2 u_0 = 0, \quad u_0(0) = A, \quad u_0'(0) = 0, \quad (2.5.11)$$

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + \omega_1 u_0 + u_0'^2 = 0, \quad (2.5.12)$$

$$u_2'' + \omega^2 u_2 + \omega_2 u_0 + u_0'^3 = 0, \quad (2.5.13)$$

$$u_3'' + \omega^2 u_3 + \omega_1 u_1 + \omega_3 u_0 + 2u_0 u_1 = 0, \quad (2.5.14)$$

$$u_4'' + \omega^2 u_4 + \omega_2 u_1 + \omega_1 u_2 + \omega_4 u_0 + 2u_0 u_2 + 3u_0'^2 u_1 = 0, \quad (2.5.15)$$

$$u_5'' + \omega^2 u_5 + \omega_2 u_2 + \omega_5 u_0 + 3u_0'^2 u_2 = 0, \quad (2.5.16)$$

$u_i (i \geq 1)$ için sınır koşulları serbestçe seçilir,ama sonuçta kapalı yaklaşık çözüm elde etmek için $u(0) = A, u'(0) = 0$ alırız.

(2.5.11) denklemini çözersek,

$$u_0 = A \cos \omega t \quad (2.5.17)$$

elde ederiz.(2.5.12)'de u_0 'ı yerine koyarsak,

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + A \omega_1 \cos \omega t + \frac{A^2}{2}(1 + \cos 2\omega t) = 0 \quad (2.5.18)$$

olur.

u_1 'de seküler terim olmaması için

$$\omega_1 = 0 \quad (2.5.19)$$

olmalıdır.

(2.5.18) denklemi için aşağıdaki özel çözüm elde ederiz.

$$u_1(t) = -\frac{A^2}{2\omega^2} + \frac{A^2}{6\omega^2} \cos 2\omega t \quad (2.5.20)$$

ω_1, u_0, u_1 'i (2.5.13)'de yerine koyarsak,

$$u_2'' + \omega^2 u_2 + A(\omega_2 + \frac{3}{4}A^2) \cos \omega t + \frac{1}{4}A^3 \cos 3\omega t = 0 \quad (2.5.21)$$

elde edilir.

Seküler terimlerden kurtulmak için

$$\omega_2 = -\frac{3}{4}A^2 \quad (2.5.22)$$

olur.

Böylece (2.5.21) denkleminin aşağıdaki özel çözümünü elde ederiz.

$$u_2 = \frac{A^3}{32\omega^2} \cos 3\omega t \quad (2.5.23)$$

Elde edilen sonucu (2.5.14) denklemde yerine koyarsak, u_3 için

$$u_3'' + \omega^2 u_3 + \omega_3 A \cos \omega t + 2A \cos \omega t \left(\frac{A^2}{6\omega^2} \cos 2\omega t - \frac{A^2}{2\omega^2} \right) = 0 \quad (2.5.24)$$

ya da

$$u_3'' + \omega^2 u_3 + A(\omega_3 - \frac{5A^2}{6\omega^2}) \cos \omega t + \frac{A^3}{6\omega^2} \cos 3\omega t = 0 \quad (2.5.25)$$

denklemlerini elde ederiz.

u_3 'de seküler terim olmaması gerektiğinden

$$\omega_3 = \frac{5A^2}{6\omega^2} \quad (2.5.26)$$

olur.

Basit cebir işlemleriyle, u_4 ve u_5 'e seküler terim olmaması gerektiğinden ω_4 ve ω_5 'i tanımlarız.

$$\omega_4 = 0 \quad (2.5.27)$$

$$\omega_5 = -\frac{3A^4}{128\omega^2} \quad (2.5.28)$$

Eğer sadece $O(\varepsilon^3)$ terimlerini tutar,(2.5.10) denkleminde tanımlanan $\omega_i (i = 1,2,3,4,5)$ 'leri yerine koyarsak,

$$1 = \omega^2 - \frac{3}{4} \varepsilon_2 A^2 + \frac{5\varepsilon_1^2 A^2}{6\omega^2} - \frac{3\varepsilon_2^2 A^4}{128\omega^2} \quad (2.5.29)$$

olur ve sonuç

$$\omega = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{4} \varepsilon_2 A^2 + \sqrt{(1 + \frac{3}{4} \varepsilon_2 A^2)^2 - \frac{10}{3} \varepsilon_1^2 A^2 + \frac{3}{32} \varepsilon_2^2 A^4}}{2}} \quad (2.5.30)$$

olur.

Karşılaştırma için küçük amplitütlar altında Nayfeh'in sonucunu

$$\omega = 1 + (\frac{3}{8} \varepsilon_2 - \frac{5}{12} \varepsilon_1^2) A^2 \quad (2.5.31)$$

yazabiliriz. Sonuç olarak, bu basit metod Nayfeh [16] ile benzer sonuçlar verir. $\varepsilon_1 = 0$ durumunda (2.5.1) denklemi ünlü Duffing denklemine dönüşür ve nonlinear frekansı (2.5.30) denkleminde elde ederiz.

$$\omega = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{4}\varepsilon_2 A^2 + \sqrt{\left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon_2 A^2\right)^2 + \frac{3}{32}\varepsilon_2^2 A^4}}{2}} \quad (2.5.32)$$

Yaklaşık periyot

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1 + \frac{3}{4}\varepsilon_2 A^2 + \sqrt{\left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon_2 A^2\right)^2 + \frac{3}{32}\varepsilon_2^2 A^4}}{2}}} \quad (2.5.33)$$

olarak ifade edilebilir.

Karşılaştırmak için Duffing denkleminin[8] tam periyodu

$$T_{tam} = \frac{4}{\sqrt{1 + \varepsilon_2 A^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k \sin^2 x}} \quad (2.5.34)$$

Biçimindedir. Burada $k = \frac{\varepsilon_2 A^2}{2(1 + \varepsilon_2 A^2)}$ dir.

$\varepsilon_2 \rightarrow \infty$ için asimptotik periyotun yüksek doğruluğa sahip olduğu görülür.

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow \infty} \frac{T_{tam}}{T} &= \frac{2\sqrt{3/8 + 0.5\sqrt{9/16 + 3/32}}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - 0.5\sin^2 x}} \\ &= \frac{2\sqrt{3/8 + 0.5\sqrt{9/16 + 3/32}}}{\pi} \times 1.68575 = 0.9478 \end{aligned} \quad (2.5.35)$$

$\varepsilon_2 > 0$ 'ın bütün değerleri için (2.5.33) periyotunun maksimum relatif hatasının %5.5 'den küçük olduğu kolayca ispatlanabilir.

Şimdi başka örnek düşünelim;

$$u'' + \omega_0^2 u - \frac{1}{6} \omega_0^2 u^3 + \frac{1}{120} \omega_0^2 u^5 = 0, \quad u(0) = A, u'(0) = 0 \quad (2.5.36)$$

Like Hagedom matematiksel sarkaç[17] yi benzer şekilde ele alır ve iki parametre tanımlar.

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{6} \omega_0^2, \varepsilon_2 = \frac{1}{120} \omega_0^2 \quad (2.5.37)$$

Sonra (2.5.36)'yı tekrar yazalım.

$$u'' + \omega_0^2 u + \varepsilon_1 u^3 + \varepsilon_2 u^5 = 0, \quad u(0) = A, u'(0) = 0 \quad (2.5.38)$$

(2.5.38) denkleminin çözümünü (2.5.9) formunda ifade edilebildiğini ve (2.5.38) denklemindeki ω_0^2 sabitinin (2.5.10) denklemine benzer bir ikili seri açılımında yazıldığını farzedelim.

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \varepsilon_1 \omega_1 + \varepsilon_2 \omega_2 + \varepsilon_1^3 \omega_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \omega_4 + \varepsilon_2^2 \omega_5 + \dots \quad (2.5.39)$$

$O(\varepsilon^2)$ 'in mertebesini korursak,yaklaşık periyodu

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 + \frac{3}{4} \varepsilon_1 A^2 + \frac{5}{8} \varepsilon_2 A^4}} \quad (2.5.40)$$

şeklinde olur.

ε_1 ve ε_2 'yi (2.5.40) denkleminde yerine koyarsak,

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{8} A^2 + \frac{1}{192} A^4}} \quad (2.5.41)$$

olur.

(2.5.36) denklemini matematiksel sarkaçın iyi bir yaklaşık denklemi olarak düşünebiliriz.

$$u'' + \omega_0^2 \sin u = 0, \quad u(0) = A, u'(0) = 0 \quad (2.5.42)$$

Matematiksel sarkaç[17] için yaklaşık periyot

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n(n+1)} A^{2n} \right)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega \left(1 - \frac{1}{8} A^2 + \frac{1}{192} A^4 - \dots \right)}} \quad (2.5.43)$$

olur.

$A = \pi/2$ olduğunda, (2.5.43)'den $T = 1.17T_0$ elde edilir, $T_0 = 2\pi/\omega$ olduğunda $T_{tam} = 1.16T_0$ olur.

2.6. Taylor Serisi Dönüşümü, Padé Yaklaşımı ve Üstel Padé Yaklaşımı

Padé metoduna girmeden önce, Taylor serisinin dönüşüm problemini oluşturacağız. Frekansı $\omega(\varepsilon)$ varsayalım, $\omega(\varepsilon)$, lineer olmayan salınımda Taylor serisine açılabilir, bu $[5,6]$ aralığındadır.

$$\omega(\varepsilon) = \omega(0) + \varepsilon \omega'(0) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \omega''(0) + \dots, \quad (2.6.1)$$

$[5,6]$ ε 'a bağlı olarak mevcut türevin olduğu aralıktır. Klasik perturbasyon metodu ile karşılaştıralım,

$$1 = \omega(0), \quad (2.6.2)$$

$$\omega_1 = \omega'(0), \quad (2.6.3)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \omega''(0), \quad (2.6.4)$$

a sahip oluruz.

$\omega_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ Lindstedt-Poincare metoduna bağlı olarak ardı ardına çözülebilir. Bununla beraber, frekansın hala daha ileri belirlemeye ihtiyacı vardır. Burada (2.6.2) - (2.6.4) başlangıç koşullarını sağlayan ω için birçok çözüm vardır. Yani frekansı en uygun şekilde belirlemek için daha fazla bilgiye ihtiyacımız vardır.

Standart Lindstedt-Poincare metoduyla, Duffing denklemini göz önünde bulundurarak,

$$\omega = 1 + \frac{3}{8} \varepsilon A^2 - \frac{21}{256} \varepsilon^2 A^4 + \frac{81}{2048} \varepsilon^3 A^6 - \frac{6549}{262144} \varepsilon^4 A^8 + \frac{37737}{2094152} \varepsilon^5 A^{10}. \quad (2.6.5)$$

denklemine sahip oluruz. Yani,

$$\omega(0) = 1, \quad (2.6.6)$$

$$\omega'(0) = \frac{3}{8} A^2, \quad (2.6.7)$$

$$\omega''(0) = -\frac{21}{128} A^4, \quad (2.6.8)$$

$$\omega'''(0) = \frac{243}{1024} A^6. \quad (2.6.9)$$

dır.

ω , (2.6.7) ~ (2.6.9) başlangıç koşullarından yararlanarak frekansı belirlemek için dönüşüm problemidir. Bununla beraber, eğer $\varepsilon \gg 1$ olduğunda lineer olmayan salınım için bilgiye sahipsek, lineer olmayan frekansı en uygun şekilde belirleyebiliriz.

Birçok sayısal örnek, $\varepsilon \rightarrow 0$ için asimptotların fiziksel anlamlarının kolayca elde edildiğini önerir. Diğer taraftan, $\varepsilon \rightarrow \infty$ olduğunda sıfırdan farklı asimptotlar hiçbir zorluk olmadan çözülebilirler.

Duffing denklemini,

$$u'' + (1 + \varepsilon u^2)u = 0 \quad (2.6.10)$$

formunda tekrar yazalım.

Deneme fonksiyonunu,

$$u = A \cos \omega t \text{ formunda seçelim,} \quad (2.6.11)$$

Burada ω belirli frekanstır.

ω^2 , frekansın karesinin asla

$$\varphi_1(t) = A \cos t \quad (2.6.12)$$

çözümünde,

$$u'' = -(1 + \varepsilon u_{\min}^2)u = -u. \quad (2.6.13)$$

salınımın çözümünün frekansının karesini de asla geçmez.

$$\varphi_2(t) = A \cos \sqrt{1 + \varepsilon A^2} t \quad (2.6.14)$$

$$u'' = -(1 + \varepsilon u_{\max}^2)u = -(1 + \varepsilon A^2)u. \quad (2.6.15)$$

Bundan dolayı,

$$0 < \varepsilon < \infty \quad \text{için} \quad 1 < \omega^2 < 1 + \varepsilon A^2 \quad (2.6.16)$$

$$\text{ya da} \quad 0 < \varepsilon < \infty \quad \text{için} \quad 1 < \omega < \sqrt{1 + \varepsilon A^2} \quad (2.6.17)$$

yi takip eder.

Böylece aşağıdaki duffing denklemi için ölçülen bağıntıya sahip oluruz.

$$\varepsilon \gg 1 \quad \text{için} \quad \omega(\varepsilon) \sim \sqrt{\varepsilon} \quad (2.6.18)$$

Bağıntının görüntüsünde, (2.6.18), frekansı (2.6.6) ve (2.6.7) den belirleyebiliriz.

$$\omega = \sqrt{1 + \frac{3}{4} \varepsilon A^2}. \quad (2.6.19)$$

$$\text{ya da} \quad \omega = \sqrt{\frac{1 + 1.5\varepsilon A^2 + 0.5301\varepsilon^2 A^4}{1 + 0.75\varepsilon A^2}} \quad (2.6.20)$$

$$\text{yada} \quad \omega = \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon A^2 + \frac{33}{64} \varepsilon^2 A^4\right)^{1/4}. \quad (2.6.21)$$

olarak bulunur.

Yaklaşım periyodu,

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \frac{3}{4} \varepsilon A^2}} \quad (2.6.22)$$

ya da

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{1 + 0.75\varepsilon A^2}{1 + 1.5\varepsilon A^2 + 0.5301\varepsilon A^4}}, \quad (2.6.23)$$

ya da

$$T_3 = 2\pi \left(1 + \frac{3}{2}\varepsilon A^2 + \frac{33\varepsilon^2 A^4}{64} \right)^{-1/4} \quad (2.6.24)$$

şeklinde yazılabilir. $\varepsilon \ll 1$, olduğunda, yukarıdaki yaklaşık periyod, perturbasyon metodu ile elde edilen aşağıdaki periyod ile tam olarak uyar. $\varepsilon \rightarrow \infty$ olduğunda

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} T_1 = \frac{4\pi}{\sqrt{3\varepsilon A^2}} = \frac{7.255}{\sqrt{\varepsilon A^2}} \quad (2.6.25)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{0.7068\varepsilon A^2}} = \frac{7.473}{\sqrt{\varepsilon A^2}}, \quad (2.6.26)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} T_3 = \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon A^2}} \left(\frac{64}{33} \right)^{1/4} = \frac{7.415}{\sqrt{\varepsilon A^2}}. \quad (2.6.27)$$

elde ederiz. Tam periyod

$$T_{ex} = \frac{4}{\sqrt{1 + \varepsilon A^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k \sin^2 x}}, \quad k = \frac{\varepsilon A^2}{2(1 + \varepsilon A^2)} \quad (2.6.28)$$

olarak okunur. (Bakınız bölüm 1.6)

Eğer, $\varepsilon \rightarrow \infty$ olursa, $k \rightarrow 0.5$ olur ve

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} T_{ex} = \frac{6.743}{\sqrt{\varepsilon A^2}} \quad (2.6.29)$$

Bu nedenle, $\varepsilon \rightarrow \infty$ olduğunda T_1, T_2, T_3 'ün doğruluğu her biri sırasıyla, %7.6, %10.8, %9.96'ya ulaşır.

Şimdi, Van der Pol denklemini göz önünde bulunduralım, Lindstedt-Poincaré metoduyla,

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = -\frac{1}{16}, \quad \omega_3 = 0, \quad \omega_4 = \frac{17}{3072} \quad (2.6.30)$$

elde edelim. ω 'nin katsayıları ε^{164} kadar büyüyerek Anderson ve Geer [18] elde edilir. Burada 10. dereceden yaklaşım, çok yavaş yakınsayan

$$\omega = 1 - \frac{1}{16}\varepsilon^2 + \frac{17}{3072}\varepsilon^4 + \frac{36}{884736}\varepsilon^6 - \frac{668899}{5096079360}\varepsilon^8 + \frac{28160413}{2293235712000}\varepsilon^{10}, \quad (2.6.31)$$

ile yazılır.

Şimdi $\varepsilon \rightarrow \infty$ durumunu göz önünde bulunduralım.

$\varepsilon \rightarrow \infty$ olduğunda periyodik çözümün olduğunu varsayalım, en kolay deneme fonksiyonu $u = A \cos \omega t$ 'yi seçelim. Bunu Van der Pol denkleminde yerine koyarsak

$$R(t) = u'' + u - \varepsilon(1 - u^2)u' = A(1 - \omega^2) \cos \omega t + A\varepsilon\omega(1 - A^2 \cos^2 \omega t) \sin \omega t \quad (2.6.32)$$

sonucunu elde ederiz.

$\omega t = \pi/4$ de kollakasyon uygularsak,

$$R(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} A(1 - \omega^2) + \frac{\sqrt{2}}{2} A \varepsilon \omega (1 - \frac{1}{2} A^2) = 0 \quad (2.6.33)$$

elde edilir. Yani,

$$(1 - \omega^2) + \varepsilon \omega (1 - \frac{1}{2} A^2) = 0. \quad (2.6.34)$$

$\varepsilon \rightarrow \infty$ olduğunda (2.6.34) yaklaşık olarak doğrulanır,

$\omega \ll 1$ olduğunu varsaymalıyız. Böyle bir durum altında, (2.6.34) denklemi

$$1 + \varepsilon \omega (1 - \frac{1}{2} A^2) = 0 \quad (2.6.35)$$

olarak sadeleşir. Bunun anlamı ε parametresi büyük değerler için,

$$\omega(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon} \quad (2.6.37)$$

olur.

Aşağıdaki örnekte aynı ustalıklarla manipülasyon uygularsak ω 'yi aşağıdaki gibi belirleyebiliriz.

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{8} \varepsilon^2}}, \quad (2.6.38)$$

$$\text{ya da } \omega = \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{4} \varepsilon^2 + \frac{13}{768} \varepsilon^4\right]^{1/4}} \quad (2.6.39)$$

$$\text{ya da } \omega = \sqrt{\frac{1+1.8125\varepsilon^2}{1+1.9375\varepsilon^2+0.2272\varepsilon^4}}. \quad (2.6.40)$$

Bunun yaklaşık periyodu aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$T_1 = 2\pi\sqrt{1+\frac{1}{8}\varepsilon^2}, \quad (2.6.41)$$

$$\text{ya da } T_2 = 2\pi\left[1+\frac{1}{4}\varepsilon^2+\frac{13}{768}\varepsilon^4\right]^{1/4} \quad (2.6.42)$$

$$\text{ya da } T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{1+1.9375\varepsilon^2+0.2272\varepsilon^4}{1+1.8125\varepsilon^2}} \quad (2.6.43)$$

Eğer $\varepsilon \rightarrow \infty$, $T_1 \rightarrow 2.221\varepsilon$, $T_2 \rightarrow 2.266\varepsilon$, $T_3 \rightarrow 2.246\varepsilon$ olur.

Küçük ε için, Bizim teorimiz standart Lindstedt-Poincaré metoduyla kesinlikle aynı sonucu verir. ε parametresinin büyük değerleri için yani $\varepsilon \gg 1$,

$$T_{ex} \rightarrow 2\varepsilon\left(\frac{3}{2}-\ln 2\right) = 1.614\varepsilon \quad (2.6.44)$$

'u takip eder [8].

Elde edilen yaklaşık periyodlar (2.6.41) ~ (2.6.43), ε parametresinin küçük ve büyük değerlerinin ikisi içinde geçerlidir ve $\varepsilon \rightarrow \infty$ olduğunda kesin olanın ayırıcı (belirgin) özelliğine sahiptir.

Yukarıdaki Ters Taylor Serisi metodu Padé metodu ile çok benzerdir. Pade yaklaşımının tanımını verelim.

$$F(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varepsilon^i, \quad (2.6.45)$$

$$F_{mn}(\varepsilon) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i \varepsilon^i}{\sum_{i=0}^m b_i \varepsilon^i}, \quad (2.6.46)$$

olsun. Burada a_i , b_i katsayıları bir sonraki durumdan belirlenir. Maclaurin serisinde $f_{mn}(\varepsilon)$ rasyonel fonksiyonun bir elemanı olan ilk $(m+n)$ bileşeni, $F(\varepsilon)$ serisinin ilk $(m+n+1)$ bileşeni ile çakışır. Sonra $F_{mn} [m/n]$ Padé yaklaşımı ile isimlendirilir. Örnek olarak, Duffing denkleminin frekansı için $[2/2]$ Padé yaklaşımı,

$$\omega_{[2/2]} = \frac{32 + 19\varepsilon A^2}{32 + 7\varepsilon A^2} \quad (2.6.47)$$

dir.

Şimdi bu nedenle, iki çok büyük koşulla eşlenen Padé metodunda değişim önereceğiz. Çoğu durumlarda,

$\varepsilon \rightarrow 0$ olduğunda asimptotun fiziksel anlamını kolaylıkla oluşturabiliriz.

$$F = F_0 + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \dots, \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.6.48)$$

Ayrıca $\varepsilon \rightarrow \infty$ da sıfırdan farklı asimptotlar da vardır.

$$F = f_0 + \varepsilon^{-1} f_1 + \varepsilon^{-2} f_2 + \dots, \varepsilon \rightarrow \infty: \quad (2.6.49)$$

Değiştirilmiş $[m, n, p]$ Padé yaklaşımı,

$$F_{mnp}(\varepsilon) = \left\{ \frac{\sum_{i=0}^m \alpha_i \varepsilon^i}{\sum_{i=0}^m \beta_i \varepsilon^i} \right\}^p, \quad (2.6.50)$$

Burada pay ve paydada katsayılar, (2.6.50) denkleminin bir elemanına göre $\varepsilon \rightarrow 0$ olduğunda seçilmiştir ve $\varepsilon \rightarrow \infty$ sırasıyla (2.6.48) ve (2.6.49) ifadeleriyle çakışmalıdır, (2.6.38), (2.6.39) ve (2.6.40) denklemleri sırasıyla modifiye Padé yaklaşımı $[0,2,1/2]$, $MPY[0,4,1/4]$ ve $MPY[2,4,1/2]$ dir. Bu şekilde bir değişim çok etkin ve uygundur.

Avantajlarını örneklerle anlatmak için, şu örnekleri göz önünde bulunduralım;

$$u' + u^2 = 0, \quad u(0) = 1. \quad (2.6.51)$$

$$u'(0) = -1. \quad (2.6.52)$$

denklemine sahip oluruz.

Bu nedenle $t \ll 1$ olduğunda,

$$u(t) = 1 - t + O(t^2). \quad (2.6.53)$$

yaklaşık çözümüne sahip oluruz.

Bu nedenle $t \rightarrow \infty$,

$$u \rightarrow 0 \quad (2.6.54)$$

olduğunda bu çözüm bir sonraki sonuca sahip olmak için olağanüstü hazırdır.

(2.6.54)'e bakarsak, (2.6.54)'ün gerekli koşulu ile çakışan

$$u = \frac{1}{1+at}, \quad (2.6.55)$$

seçilir. Sabit a , (2.6.53)'ün söyleyişi ile $a = 1$ olarak belirlenir. Bu nedenle tam çözüm olan $u = \frac{1}{1+t}$ (2.6.55)'yi gözlemleyebiliriz.

Şimdi salınımı göz önünde bulunduralım,

$$u'' + \varepsilon u^3 = 0, \quad u(0) = A, \quad u'(0) = 0. \quad (2.6.56)$$

Biz bunun periyod çözüme sahip olduğunu biliyoruz ve bunun yaklaşık çözümü $u = A \cos \omega t$ formunda varsayalım, burada ω bilinmeyen frekanstır, daha ilerde belirlenir.

(2.6.56)'dan bir sonraki bağıntıyı kolaylıkla elde edebiliriz.

$$u''(0) = -\varepsilon A^3. \quad (2.6.57)$$

Şartları eleştirmeye (2.6.57),

$$u''(0) = -A\omega^2 = -\varepsilon A^3. \quad (2.6.58)$$

sahip oluruz.

Frekans

$$\omega = \varepsilon^{1/2} A. \quad (2.6.59)$$

olarak belirlenir. Tam frekans $\omega_{ex} = 0.9318\varepsilon^{1/2}A$ olarak okunur. %7.3 doğruluk olağanüstü iyidir.

Şimdi üstel Padé yaklaşımını önerelim.

$$F = F_0 + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \dots, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.6.60)$$

olsun. $\varepsilon \rightarrow \infty$ 'da sıfırdan farklı asimtotlarda vardır.

$$F = f_0, \quad \varepsilon \rightarrow \infty. \quad (2.6.61)$$

Sonra $[m, n]$ üstel Padé yaklaşımını

$$F_{mn}(\varepsilon) = \frac{\sum_{i=0}^m c_i \exp d_i \varepsilon}{\sum_{i=0}^n a_i \exp b_i \varepsilon}, \quad (2.6.62)$$

formuna sahiptir.

a_i, b_i, c_i, d_i katsayıları bir sonraki şartla belirlenir. Maclaurin serisinde $F_{mn}(\varepsilon)$ rasyonel fonksiyonunun bir elemanının ilk bileşenleri $(2m + 2n), F(\varepsilon)$ serisinin ilk bileşenleri $(2m + 2n)$ ile aynıdır (çakışır).

$$u' - u^2 + 1 = 0, \quad u(0) = 0. \quad (2.6.63)$$

örneğini göz önünde bulunduralım,

$$u'(0) = -1, \quad (2.6.64)$$

ve

$$u''(0) = 0. \quad (2.6.65)$$

denklemini elde etmek kolaydır. $t \rightarrow \infty$, olursa, $u = \pm 1$ 'e sahip oluruz. Seçimimize göre üstel Padé yaklaşımı [1,1],

$$u = \frac{1 - e^{at}}{1 + e^{bt}}. \quad (2.6.66)$$

formundadır.

Şartları eşleştirirsek;

$$u'(0) = -b = -1, \quad (2.6.67)$$

$$u''(0) = b(2a - b) = 0, \quad (2.6.68)$$

$a = 1/2$ ve $b = 1$ 'e sahibiz ve aşağıdaki sonuca ulaşılır. Böylece

$$u = \frac{1 - e^{0.5t}}{1 + e^t}. \quad (2.6.69)$$

bulunur. ÜPY [2,2]

$$u = \frac{c_0 + c_1 e^{d_1 t} + c_2 e^{d_2 t}}{a_0 + a_1 e^{b_1 t} + a_2 e^{b_2 t}}, \quad (2.6.70)$$

formunda da oluşturabiliriz.

Burada sabitler,

$$u^n(0) = u_{ex}^{(n)}(0), \quad n = 0 \sim 9, \quad u(\infty) = -1. \quad (2.6.71)$$

yerleşimiyle belirlenebilir. Burada $u_{ex}^{(n)}(0)$ (2.6.63)'den elde edilebilir. Örneğin;

$$u_{ex}(0) = 0, u'_{ex}(0) = -1, u''_{ex}(0) = 0, u'''_{ex}(0) = 2, u_{ex}^{(4)}(0) = 0, u_{ex}^{(5)}(0) = -16.$$

Üstel Padé yaklaşımı lineer olmayan dalga denklemlerinin çözümünü bulmada çok etkili ve uygundur.

2.7. Modifiye Shohat Açılımı

Van der Pol eşitliği için Shohat açılımı yalnızca küçük ε parametresi için değil aynı zamanda büyük ε parametresi içinde oldukça doğrudur. Fakat Mickens bunun bir “perturbasyon” (perturbation) şeması olarak genel bir geçerliliğinin olmadığını göstermiştir. Bu şema, ilk düşünüldüğü şekliyle, Duffing denklemi için büyük ε değerlerine genişletilebilir. Bu bölümde “perturbasyon” açılımının geçerliliğinin güçlü lineer olmayan salınımına genişletebilmek için, modifiye bir shohat açılımını öğreneceğiz.

Van der Pol Polinom denklemini ele alalım;

$$u'' + u = \varepsilon(1 - u^2)u'. \quad (2.7.1)$$

ve Shohat'sın makalesiyle tutarlı işaret ve değerleri korumak için,

$$t = \frac{s}{f(\varepsilon)}, f(\varepsilon) = 1 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots \quad (2.7.2)$$

yeni denklem

$$f^2(\varepsilon) \frac{d^2u}{ds^2} + u = f(\varepsilon) \cdot \varepsilon(1 - u^2)u'. \quad (2.7.3)$$

halini alır.

$$r = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}. \quad (2.7.4)$$

değişken dönüşümünü tanımlayalım ya da,

$$\varepsilon = r - r^2 + r^3 - \dots, \quad (2.7.5)$$

$$\mathcal{E}f(\varepsilon) = r + c_2 r^2 + c_3 r^3 + \dots, \quad (2.7.6)$$

$$u = \cos s + r u_1(s) + r^2 u_2(s) + \dots. \quad (2.7.7)$$

Bölüm 2.2'de tanıtilan Lindstedt-Poincaré metoduna başvurarak,

$$c_2 = 1, \quad c_3 = \frac{15}{16}, \quad c_4 = \frac{13}{16}. \quad (2.7.8)$$

denklemini buluruz.

Duffing denklemini ele alalım ve

$$\rho = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \quad (2.7.9)$$

olan yeni değişkeni tanıyalım ve açısal frekansın ve çözümün

$$\varepsilon \omega(\varepsilon) = \rho + c_2 \rho^2 + c_3 \rho^3 + \dots, \quad (2.7.10)$$

$$u(\tau, \rho) = u_0(\tau) + \rho u_1(\tau) + \rho^2 u_2(\tau) + \dots, \quad (2.7.11)$$

şeklinde yazılabildiğini varsayalım. Burada $\tau = \omega t$ 'dir.

Perturbasyon metodunun geleneksel halinde işlem yaparsak,

$$u_0(\tau) = A \cos \tau, \quad (2.7.12)$$

$$u_1(\tau) = \frac{1}{32} A^2 (\cos 3\tau - \cos \tau), \quad (2.7.13)$$

$$\varepsilon \omega = \rho + \left(1 + \frac{3}{8} A^2\right) \rho^2 + O(\rho^3). \quad (2.7.14)$$

sonuçlarını elde ederiz.

Çok küçük ε değeri için, Shohat açılımı ve standart Lindstedt-Poincaré metodunun kesinlikle aynı sonuçları verdiği aşikardır. Ama bu büyük ε için geçerli değildir. $\varepsilon \gg 1$ olduğunda,

$$\rho(\varepsilon) \rightarrow 1 \text{ ve } \omega \sim 1/\varepsilon. \quad (2.7.15)$$

Gerçekte, büyük ε değeri için Duffing denkleminde açılmal frekans

$$\omega \sim \sqrt{\varepsilon}. \quad (2.7.16)$$

halini alır. (Bakınız denklem (2.6.18)).

Böylece, ilk düşünüldüğü şekliyle, Shohat açılımının Duffing denklemini için büyük ε değerlerinde geçerli olmadığı sonuçlandırılabilir.

Shohat açılımının değiştirilmiş halini geliştirmek için, ρ değişkenini

$$\rho = \frac{\varepsilon}{a + \varepsilon}, \quad (2.7.17)$$

şeklinde yeniden tanımlayalım. Buradan,

$$\varepsilon = \frac{a\rho}{1-\rho} \text{ ve } a\rho = \varepsilon(1-\rho). \quad (2.7.18)$$

dir. Burada, a büyük bir değerdir, $a \gg \varepsilon$.

Bu nedenle Duffing denklemi,

$$\omega^2 u'' + u - \rho(\omega^2 u'' + u - au^3) = 0, \quad (2.7.19)$$

formunda tekrar yazılabilir. Burada üsler τ 'ya göre türevi göstermektedir.

u ve ω , her iki bilinmeyende,

$$u = u_0 + \rho u_1 + \rho^2 u_2 + \dots, \quad (2.7.20)$$

$$\omega^2 = 1 + \rho \omega_1 + \rho^2 \omega_2 + \dots \quad (2.7.21)$$

şeklinde açıklanabilir.

2.7.20 ve 2.7.21 denklemlerini 2.7.19 denklemine yerine koyarak, ρ 'nun kuvvetleri gibi katsayılar,

$$u_0'' + u_0 = 0, \quad u_0(0) = A, \quad u_0'(0) = 0, \quad (2.7.22)$$

$$u_1'' + u_1 + \omega_1 u_0'' - (u_0'' + u_0) + au_0^3 = 0, \quad u_1(0) = 0, \quad u_1'(0) = 0 \quad (2.7.23)$$

denklemini sağlar. (2.7.22) denkleminin çözümü $u_0 = A \cos \tau$ 'dir. u_1 de seküler olmayan terimlerin gerekliliği,

$$\omega_1 = \frac{3}{4} a A^2. \quad (2.7.24)$$

sonucunu çıkarır.

Eğer, örneğin 1. dereceden yaklaşım yeterli ise,

$$\omega = \sqrt{1 + \frac{3}{4} a \rho A^2} = \sqrt{1 + \frac{3}{4} a \rho A^2 (1 - \rho)}. \quad (2.7.25)$$

denkleminde sahip oluruz.

(2.7.25) denklemindeki a sabiti belirli olmalıdır. Bu nedenle orijinal parametre ε 'nin büyüklüğünü önemsemeyerek, ρ değişkeni daima çok küçük kalır. Yani $\rho \ll 1$. Pratikte, açısal frekansın özdeşleşmesinden sonra $\rho = 0$ olarak alınız.

2.8. Çok Zamanlı Açılımlar

$$u'' + 2\varepsilon u' + u = 0, \quad (2.8.1)$$

formunda yazılan lineer salınımı, basit prosedürün en iyi açıklayıcı örneği olarak göz önünde bulunduralım. Basit açılım,

$$u = a \cos(t + \beta) - \varepsilon a t \cos(t + \beta) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 a [t^2 \cos(t + \beta) + \sin(t + \beta)] + \dots \quad (2.8.2)$$

sonucuna ulaşır.

Seküler terimlerin varlığı yüzünden $t \geq 0(\varepsilon^{-1})$ olduğunda bu açılım geçerli değildir. İyi bir yaklaşım, t ve ε 'un yanında u 'yu

$\varepsilon^2 t (n=1,2,3\dots)$ kombinasyonuna dayanarak açıklar. Çarpım skalası metodunun en kolay düşüncesi farklı zaman ölçeklerine girmektir.

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t \quad (2.8.3)$$

Burada $u = u(t; \varepsilon)$ yerine $u = u(T_n; \varepsilon)$ yazarız. Zincir kuralı kullanılarak,

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad (2.8.4)$$

ve
$$\frac{d^2}{dt^2} = (D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots)^2, \quad (2.8.5)$$

elde edilir. Burada $D_n = \partial / \partial T_n$ 'dir.

Çözüm,

$$u = u_0(T_n) + \varepsilon u_1(T_n) + \varepsilon^2 u_2(T_n) + \dots, \quad (2.8.6)$$

şeklinde açıklanabildiğini varsayalım.

Kolay bir işlemle,

$$u = B e^{-\alpha t} \cos\left(t - \frac{1}{2} \varepsilon^2 t + \beta\right) + O(\varepsilon^2) \quad (2.8.7)$$

elde edilir.

Genellikle, yaklaşık çözüm birçok durumda geçerli olan çarpım skalası metoduyla sadece küçük parametrelerin değerleri için çözülür.

Bir sonraki bölümde, parametrelerin çok büyük değerleri için metodun geçerliliğini, metodun güvenilir değişimi ile sunacağız. Yani $\varepsilon \gg 1$ olacaktır.

Örnek 1

$$u'' + (1 + \varepsilon)u = 0, \quad (2.8.8)$$

diferansiyel denklemini göz önünde bulunduralım. Yukarıda verilen örneğin biçim değişimiyle,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial T_0 \partial T_1} + O(\varepsilon^2) + (1 + \varepsilon)u = 0 \quad (2.8.9)$$

'i elde ederiz. u_0 ve u_1 için denklem

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} + u_0 = 0, \quad (2.8.10)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 + 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} + u_0 = 0. \quad (2.8.11)$$

(2.8.7)'nin genel çözümü,

$$u_0 = a(T_1, T_2, \dots) \cos(T_0 + \beta(T_1, T_2, \dots)) \quad (2.8.12)$$

dir. u_0 'ı (2.8.8)'de yerine koyarak,

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = -2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} (a \cos(T_0 + \beta)) - a \cos(T_0 + \beta)$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \frac{\partial}{\partial T_1} (a \sin(T_0 + \beta)) - a \cos(T_0 + \beta) = 2 \frac{\partial a}{\partial T_1} \sin T_0 \\
&+ (2 \frac{\partial \beta}{\partial T_1} - 1) a + \cos(T_0 + \beta).
\end{aligned}
\tag{2.8.13}$$

sonuçlanır.

u_1 'de seküler olmayan terimler,

$$\frac{\partial a}{\partial T_1} = 0, \tag{2.8.14}$$

$$2 \frac{\partial \beta}{\partial T_1} - 1 = 0. \tag{2.8.15}$$

ifadelerini gerektirir. Eğer sonuç diferansiyel denklem u_1 için çözümlerse,

$$u_1 = 0 \tag{2.8.16}$$

bulunur.

(2.8.14)'ün çözümü T_1 'in bağımsızlığını gösterir, yani $a = a(T_2, T_3, \dots)$

(2.8.15)'in çözümü,

$$\beta = \frac{T_1}{2} \tag{2.8.17}$$

'dir. Bundan dolayı,

$$u = a(T_2, T_3, \dots) \cos(T_0 + \frac{1}{2} T_1 + \dots) = A \cos(1 + \frac{1}{2} \varepsilon)t + O(\varepsilon^2). \tag{2.8.18}$$

Örnek 2

Lineer olmayan,

$$u'' + 4u + \varepsilon u'' u^2 = 0, \quad (2.8.19)$$

salınımını göz önünde bulunduralım. $T_0 = t$ ve $T_1 = \varepsilon t$ biçim değişikliğine girersek, ε 'nin kuvvetlerini büyüterek,

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} + 4u_0 = 0, \quad (2.8.20)$$

denklemini çözmek için homojen olmayan,

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + 4u_1 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial T_0 \partial T_1} + u_0^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} = 0. \quad (2.8.21)$$

lineer diferansiyel denklemini elde ederiz. (2.8.18)'in çözümü,

$$u_0 = A(T_1)e^{2iT_0} + \bar{A}(T_1)e^{-2iT_0}. \quad (2.8.22)$$

'dir. u_0 'ı (2.8.19)'da yerine koyarsak,

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + 4u_1 = -4iAe^{2iT_0} + 4A^3e^{6iT_0} + 12A^2\bar{A}e^{2iT_0} \quad (2.8.23)$$

sonuçlanır.

Tekrar, seküler terimlerin elenmesi,

$$-4iA + 12A^2\bar{A} = 0. \quad (2.8.24)$$

'ü gerektirir.

$$A = \frac{1}{2} a \exp(i\beta), \quad (2.8.25)$$

kutupsal formunun (2.8.24)'de yerine konmasıyla ve reel ve imajiner bölümlerinin ayrılmasıyla,

$$\frac{\partial a}{\partial T_1} = 0, \quad (2.8.26)$$

$$a \frac{\partial \beta}{\partial T_1} + \frac{3}{4} a^3 = 0. \quad (2.8.27)$$

elde edilir.

Bundan dolayı a bir sabittir ve

$$\beta = -\frac{3}{4} a^2 T_1 + \beta_0 \quad (2.8.28)$$

dır. Bu nedenle, birinci yaklaşım,

$$u = a \cos \left[\left(2 - \frac{3}{4} \varepsilon a^2 \right) t + \beta_0 \right] + \dots, \quad (2.8.29)$$

dur. Burada a ve β_0 sabitleri başlangıç şartları ile belirlenmiştir.

2.9. Modifiye Çok Zamanlı Açılımlar

Bu bölümde, aşağıdaki genel lineer olmayan salınımları göz önünde bulunduracağız;

$$\frac{d^2u}{dt^2} + bu + \varepsilon f(u', u) = 0, \quad u(0) = A, u'(0) = 0. \quad (2.9.1)$$

Burada b, ε sabittir. Bizim çalışmamızda ε parametresinin küçük olması gerekmez, yani $0 < \varepsilon < \infty$ 'dur.

Zaman skalasına girişte $T_n = \varepsilon^n t$ ($n = 0, 1, \dots$) 'dir. Çözüm ve sabit olan b 'yi ;

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots, \quad (2.9.2)$$

$$b = \omega^2 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots, \quad (2.9.3)$$

Burada ω^2 ve ω_i sabitleri seküler olmayan terimlerin anlamıyla belirlenebilir.

Basit işlemlerin en iyi örneğini vermek için matematiksel açılımların karışık biçimlerine gerek duyulmadan, bilinçaltındaki fikirler açık yapılmalıdır.

$$u'' + 2\varepsilon u' + 1.u = 0 \quad (2.9.4)$$

şeklinde yazılan (2.8.1) örneğine tekrar göz atalım.

Çözümün ve (2.9.4) örneğindeki 1 katsayısının, sırasıyla (2.9.2) ve (2.9.3) denklemleriyle ifade edilebildiğini varsayalım. Burada $b = 1$; (2.9.2) ve (2.9.3)'ü

(2.9.4)'de yerine koyarak ve standart perturbasyon metodunda aynı manipulasyonla ilerleyerek,

$$D_0^2 u_0 + \omega^2 u_0 = 0, \quad (2.9.5)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 + \omega_1 u_0 + 2D_0 D_1 u_0 + 2D_0 u_0 = 0, \quad (2.9.6)$$

$$D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 + \omega_2 u_0 + \omega_1 u_1 + 2D_0 D_2 u_0 + D_1^2 u_0 + 2D_0 D_1 u_1 + 2D_0 u_1 + 2D_1 u_0 = 0. \quad (2.9.7)$$

denklemlerini elde ederiz.

(2.9.5) denklemi için genel çözüm

$$u_0 = A(T_1, T_2) \cos(\omega T_0 + \beta), \quad (2.9.8)$$

Burda A T_1, T_2, \dots 'nin bir fonksiyonu ve β bir sabittir.

β çarpım skalaları standart metodunda, T_1, T_2, \dots 'nin bir fonksiyonu olarak incelenir. Bu görüşte, yaklaşımımız çarpım skalası standart metodundan daha kolay görünür. u_1 için denklem,

$$D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 + \omega_1 \cos(\omega T_0 + \beta) - 2\omega \sin(\omega T_0 + \beta) D_1(A) - 2A\omega \sin(\omega T_0 + \beta) = 0$$

(2.9.9)

şeklinde ifade edilir. Seküler terimlerin çıkarılmasıyla,

$$\omega_1 = 0, \quad (2.9.10)$$

'a ve çözümü

$$D_1(A) + A = 0, \quad (2.9.11)$$

olan

$$A = B(T_2)e^{-T_2}. \quad (2.9.12)$$

a ihtiyaç duyulur. u_1 için çözüm,

$$u_1 = 0 \quad (2.9.13)$$

olup, (2.9.8) ve (2.9.13)'den u_0 ve u_1 'i (2.9.7)'de yerine koyarak,

$$\begin{aligned} D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 + \omega_2 A \cos(\omega T_0 + \beta) - 2D_2(A) \sin(\omega T_0 + \beta) \\ + D_1^2(A) \cos(\omega T_0 + \beta) + 2D_1(A) \cos(\omega T_0 + \beta) = 0 \end{aligned} \quad (2.9.14)$$

elde edilir. Seküler terimleri u_2 'de çıkararak, $\cos(\omega T_0 + \beta)$ ve $\sin(\omega T_0 + \beta)$ 'nin katsayılarını sıfıra eşit alarak kurarız. Böylece

$$D_2(A) = 0, \quad (2.9.15)$$

$$\omega_2 A + D_1^2(A) + 2D_1(A) = 0. \quad (2.9.16)$$

bulunur. (2.9.11)'e bakarsak $\omega_2 = 1$, $A = Be^{-T_1}$ 'i elde ederiz. Burada B sıfır olmayan sabittir. u_2 için çözüm,

$$u_2 = 0. \quad (2.9.17)$$

olarak okunur. Bundan dolayı ikinci dereceden

$$u = Be^{-\varepsilon t} \cos(\omega t + \beta), \quad (2.9.18)$$

çözümünü elde ederiz. Burada frekans,

$$\omega = \sqrt{1 - \varepsilon\omega_1 - \varepsilon^2\omega_2} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}. \quad (2.9.19)$$

olarak çözülür. (2.9.18) denklemi bir tam çözümdür. Burada B ve β sabitleri başlangıç koşullarından belirlenir.

$$u'' + 1.u + \varepsilon u^3 = 0, \quad u(0) = A \text{ ve } u'(0) = 0 \quad (2.9.20)$$

biçiminde yazılabilen duffing denklemi, şimdiki modifiye çok zamanlı açılımının etkinliğini ve uygunluğunu doğrulamak için kullanılır.

$b = 1$ alarak ve (2.9.2)'yi (2.9.3)'te yerine koyarak, (2.9.20)'de ε 'nin aynı kuvvetlerini toplayarak,

$$D_0^2 u_0 + \omega^2 u_0 = 0, \quad (2.9.21)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 + \omega_1 u_0 + 2D_0 D_1 u_0 + u_0^3 = 0, \quad (2.9.22)$$

elde edilir. $u_0(0) = A$ ve $u_0'(0)$ başlangıç koşulları ile (2.9.21) denklemini çözerek,

$$u_0 = A(T_1, T_2) \cos \omega T_0 \quad (2.9.23)$$

elde edilir. u_0 'ı (2.9.22)'de yerine koyarak,

$$D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 + A(\omega_1 + \frac{3}{4}A^2) \cos \omega T_0 - 2\omega D_1(A) \sin \omega T_0 + \frac{1}{4}A^3 \cos 3\omega T_0 = 0. \quad (2.9.24)$$

sonuçlanır. Seküler terimlerin elenmesi,

$$D_1(A) = 0, \quad (2.9.25)$$

$$\omega_1 = -\frac{3}{4}A^2. \quad (2.9.26)$$

'yı gerektirir. Eğer (2.9.3)'den sadece birinci dereceden yaklaşık çözümler aranırsa,

$$\omega = \sqrt{1 + \frac{3}{4}\varepsilon A^2} \quad (2.9.27)$$

elde edilir. $u_1(0) = 0$ ve $u_1'(0) = 0$ başlangıç koşullarıyla (2.9.24)'ün çözümü,

$$u_1 = \frac{A^3}{32\omega^2} (\cos 3\omega t - \cos \omega t). \quad (2.9.28)$$

olarak bulunur. Böylece,

$$u = A \cos \omega t + \frac{\varepsilon A^3}{32\omega^2} (\cos 3\omega t - \cos \omega t). \quad (2.9.29)$$

ile birinci dereceden yaklaşık çözümü elde ederiz.

Küçük ε için yani $0 < \varepsilon \ll 1$ 'i göz önünde bulunduralım, bu

$$\omega = 1 + \frac{3}{8}\varepsilon A^2 \quad (2.9.30)$$

'yi izler.

Bundan dolayı, bu limitte, asıl yöntem, Standart Lindstedt-Poincare yöntemi ile tam olarak aynı sonucu verir. $\varepsilon \rightarrow \infty$ olduğunda doğruluk %7.6 olarak incelenir.

Şimdi,

$$u'' + 1.u - \varepsilon(u' - \frac{1}{3}u^3) = 0 \quad (2.9.31)$$

olarak okunan Rayleigh denklemini göz önünde bulunduralım. Başlangıç koşulları $u(0) = a$ ve $u'(0) = 0$ 'dır. Bizim çalışmamızda ε 'un küçük olması gerekmez. Yani $0 < \varepsilon < \infty$ 'dır. Yukarıdaki örneklerden aynı ustalıkla aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$D_0^2 u_0 + \omega^2 u_0 = 0, \quad (2.9.32)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 + \omega_1 u_0 + 2D_0 D_1 u_0 - D_0 u_0 + \frac{1}{3}(D_0 u_0)^3 = 0 \quad (2.9.33)$$

$$D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 + \omega_2 u_0 + \omega_1 u_1 + 2D_0 D_2 u_0 + D_1^2 u_0 + 2D_0 D_1 u_1 - D_0 u_1 - D_1 u_0$$

$$+ (D_0 u_0)^2 D_0 u_1 + (D_0 u_0)^2 D_1 u_0 = 0$$

(2.9.34)

(2.9.32)'nin çözümü

$$u_0 = A(T_1, T_2) \cos \omega T_0, \quad (2.9.35)$$

dır. Sonucu (2.9.33)'te yerine koyarak,

$$D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 + \omega_1 A \cos \omega T_0 - 2\omega D_1(A) \sin \omega T_0 + \omega A \sin \omega T_0 - \frac{1}{3} \omega^3 A^3 \sin^3 \omega T_0 = 0$$

(2.9.36)

elde edilir. Seküler terimlerin varlığını çıkarmak,

$$\omega_1 = 0, \quad (2.9.37)$$

$$-2\omega D_1(A) + \omega A - \frac{1}{4} \omega^3 A^3 = 0 \quad (2.9.38)$$

'ı gerektirir. Böylece (2.9.38)'in integrali alınır,

$$A = \frac{2a\omega}{\left[a^2 \omega^2 + (4 - a^2 \omega^2) e^{-T_1} \right]^{1/2}} \quad (2.9.39)$$

elde edilir.

Önemli Not: İlk zamanlarda A 'nın büyüklüğünün lineer olmayan ω frekans üzerine dayandığını bulduk. Ayrıca $t \rightarrow \infty$ ya da $\varepsilon \rightarrow \infty$ olduğunda A 'nın büyüklüğünün, sıfırdan farklı olduğu sürece a 'nın başlangıç değerine bakılmaksızın 2 eğiliminde olduğu açıktır.

$u_1(t)$ için kısmi çözüm,

$$u_1 = \frac{\omega A^3}{32} \sin 3\omega T_0 \quad (2.9.40)$$

olur. u_0 ve u_1 'i (2.9.34)'te yerine koyarak ve u_2 'de seküler olmayan terimler gerekmeyerek,

$$\int_0^T \cos \omega T_0 \left\{ \omega_2 u_0 + \omega_1 u_1 + 2D_0 D_2 u_0 + D_1^2 u_0 + 2D_0 D_1 u_1 - D_0 u_1 - D_1 u_0 \right. \\ \left. + (D_0 u_0)^2 D_0 u_1 + (D_0 u_0)^2 D_1 u_0 \right\} dt = 0 \quad (2.9.41)$$

ya da

$$\int_0^T \cos \omega T_0 \left\{ \omega_2 u_0 + D_1^2 u_0 - D_1 u_0 + (D_0 u_0)^2 D_0 u_1 + (D_0 u_0)^2 D_1 u_0 \right\} dt = 0 \quad (2.9.42)$$

(2.9.42)'yi elde ederiz. Bu da bizi

$$\omega_2 = -\frac{1}{A} D_1^2(A) + \frac{1}{A} D_1(A) + \frac{3A^4 \omega^4}{128} - \frac{3A \omega^2}{4} D_1(A) = 0 \quad (2.9.43)$$

sonucuna götürür.

Eğer, ikinci derece yaklaşık çözümünü durdurursak, (2.9.43)'ten,

$$1 = \omega^2 + \varepsilon^2 \left[-\frac{1}{A} D_1^2(A) + \frac{1}{A} D_1(A) + \frac{3A^4 \omega^4}{128} - \frac{3A \omega^2}{4} D_1(A) \right] = 0 \quad (2.9.44)$$

elde edilir. (2.9.38)'i tekrar hatırlayarak $D_1(A) = -A/2 + \omega^2 A^3/8$ 'a sahip oluruz.

Lineer olmayan frekans ve genlik arasındaki ilişkiyi çok önemli olan (2.9.44) denklemini ortaya çıkarır. Bu nedenle bu denklemini Frekans-Genlik denklemini olarak isimlendiririz. Şimdiki bazı yazarlar böyle bir bağıntının daha önce elde edilmemiş olduğunu bilirler. Başlangıç genliği ve asıl genlik üzerinde lineer olmayan frekansın bağımlılığı, lineer olmayan salınımda çok önemli karakterdir. Çok küçük ε için $\omega = 1 + O(\varepsilon^2)$ 'ye sahip olmamız çok aşikardır. Geleneksel çarpım skalası metoduyla elde edilen $\omega = 1 + O(\varepsilon^2)$ (2.9.44) denklemini, yeniden

$$\frac{1}{\varepsilon^2}(-1 + \omega^2) - \frac{1}{A}D_1^2(A) + \frac{1}{A}D_1(A) + \frac{3A^4\omega^4}{128} - \frac{3A\omega^2}{4}D_1(A) = 0 \quad (2.9.45)$$

formunda tekrar yazalım.

$\varepsilon \rightarrow \infty$ olduğunda $\omega \rightarrow 0$, $A \rightarrow 2$ ve $D_1(A) \rightarrow -1 + \omega^2 \rightarrow -1$ olduğu açıktır. Basit asimtotik açılımıyla,

$$\omega = C\varepsilon^{-1} + O(\varepsilon^{-2}), \quad (2.9.46)$$

bağıntısını buluruz. Burda C bir sabittir. ε 'nun büyük değerleri için ($\varepsilon \gg 1$), aşağıdaki bağıntıyı tam periyod [8] için elde ederiz.

$$T_{ex} \approx 2\varepsilon \int_{2/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \left(\frac{dv}{v} - 3vdv \right) = 2\varepsilon \left(\frac{3}{2} - \ln 2 \right) = 1.614\varepsilon \quad (\varepsilon \gg 1) \quad (2.9.47)$$

Büyük ε için, yaklaşık periyodun, tam olanla aynı belirgin özelliğe sahip olduğu açıktır.

2.10. Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky Metodu

KMB metodu N.M Krylov (1879-1955) ve N.N Bogoliubov (1909-1992) tarafından geliştirilmiştir. Metod matematiksel olarak Bogoliubov ve Yury Mitropolsky (1917-) tarafından genişletilmiş ve uygunlaştırılmıştır.

Lineer olmayan diferansiyel denklemin,

$$u'' + u = \varepsilon f(u, u'). \quad (2.10.1)$$

formunda sahip olduğunu düşünelim.

Eğer $\varepsilon = 0$ ise, (2.10.1) denklemi,

$$u''+u = 0 . \quad (2.10.2)$$

lineer denkleme indirgenir. (2.10.2)'nin çözümü,

$$u = A \cos(t + \theta) \quad (2.10.3)$$

formunda yazılabilir. Burada A ve θ sabittir. Çözümün türevinin (2.10.3) denklemiyle,

$$u' = -A \sin(t + \theta) , \quad (2.10.4)$$

şeklinde olduğunu unutmayalım.

Eğer $\varepsilon \neq 0$ fakat yeterince küçükse, lineer olmayan (2.10.1) denkleminin (2.10.4) denkleminin türev formuyla, A ve θ sabit olmaktansa t 'nin fonksiyonları olmak şartıyla, (2.10.3) denkleminin çözüm formu olduğunu varsayabiliriz.

Bu, (2.10.1) denkleminin çözümünün

$$u = A(t) \cos(t + \theta(t)) \quad (2.10.5)$$

olduğunu varsaymaktadır.

Eşitlikteki A ve θ t 'nin fonksiyonlarıdır. Bunlar çözümün türevi gibi sabitleri belirler.

$$u' = -A(t) \sin(t + \theta(t)) , \quad (2.10.6)$$

Bu varsayılan çözümün diferansiyeli alınarak;

$$u' = A' \cos(t + \theta) - A(1 + \theta') \sin(t + \theta) , \quad (2.10.7)$$

elde edilir. u' için, (2.10.6) denklemiyle verilen formu elde etmek amacıyla,

$$A' \cos(t + \theta) - A \theta' \sin(t + \theta) = 0, \quad (2.10.8)$$

a gerek duymalıyız. Varsayılan türevin diferansiyeli alınarak, (2.10.6) denkleminde,

$$u'' = -A' \sin(t + \theta) - A(1 + \theta') \cos(t + \theta). \quad (2.10.9)$$

elde edilir.

Varsayılan çözüm (2.10.5) denklemini, varsayılan türev (2.10.6) denklemi ve (2.10.9) denklemiyle verilen ikinci türevi, (2.10.10) diferansiyel denkleminde yerine koyarak,

$$A' \sin(t + \theta) + A \theta' \cos(t + \theta) = -\varepsilon f[A \cos(t + \theta), -A \sin(t + \theta)], \quad (2.10.10)$$

'u elde ederiz.

Eğer $(t + \theta)$ yerine $\varphi(t)$ alırsak, (2.10.8) ve (2.10.10) denklemleri,

$$A' \cos \varphi - A \theta' \sin \varphi = 0, \quad (2.10.11)$$

$$A' \sin \varphi + A \theta' \cos \varphi = -\varepsilon f[A \cos \varphi, -A \sin \varphi] \quad (2.10.12)$$

şeklinde yazılabilir. (2.10.11) ve (2.10.12) denklemlerini A' ve θ' için çözerek,

$$A' = -\varepsilon f[a \cos \varphi, -a \sin \varphi] \sin \varphi \quad (2.10.13)$$

$$\theta' = \frac{-\varepsilon}{A} f[a \cos \varphi, -a \sin \varphi] \cos \varphi, \quad (2.10.14)$$

denklemlerini elde ederiz.

$f[a \cos \varphi, -a \sin \varphi] \sin \varphi$ ve $f[a \cos \varphi, -a \sin \varphi] \cos \varphi$ 'yi Fourier serisini açarak,

$$f \sin \varphi = K_0(A) + \sum_{n=1}^{\infty} [K_n(A) \cos n\varphi + L_n(A) \sin n\varphi], \quad (2.10.15a)$$

$$f \cos \varphi = P_0(A) + \sum_{n=1}^{\infty} [P_n(A) \cos n\varphi + Q_n(A) \sin n\varphi], \quad (2.10.15b)$$

yi elde ederiz.

Burada;

$$K_0(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \sin \varphi d\varphi,$$

$$K_n(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \sin \varphi \cos n\varphi d\varphi,$$

$$P_0(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \cos \varphi d\varphi,$$

$$P_n(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \cos \varphi \cos n\varphi d\varphi,$$

$$L_n(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \sin \varphi \sin n\varphi d\varphi,$$

$$Q_n(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \cos \varphi \sin n\varphi d\varphi.$$

Böylece (2.10.13) ve (2.10.14) denklemleri,

$$A' = -\varepsilon K_0(A) - \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} [K_n(A) \cos n\varphi + L_n(A) \sin n\varphi], \quad (2.10.16)$$

ve

$$\theta' = \frac{-\varepsilon}{A} P_0(A) - \frac{\varepsilon}{A} \sum_{n=1}^{\infty} [P_n(A) \cos n\varphi + Q_n(A) \sin n\varphi], \quad (2.10.17)$$

şeklinde yazılabilir.

Krylov ve Bogoliubov'un birinci yaklaşımı (2.10.16) ve (2.10.17) denklemlerinin sağ tarafındaki ilki hariç tüm terimlerini içerir;

$$A' = -\varepsilon K_0(A) = -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \sin \varphi d\varphi \quad (2.10.16)$$

$$\theta' = -\frac{\varepsilon}{A} P_0(A) = -\frac{\varepsilon}{2\pi A} \int_0^{2\pi} f \cos \varphi d\varphi \quad (2.10.17)$$

$f = -u^3$ olsun. Bu Duffing Denklemi ile eşlenir. $A(t) = \text{sabit}$ elde edilir ve θ aşağıdaki denklemle belirlenir;

$$\theta' = \frac{\varepsilon}{2\pi A} \int_0^{2\pi} A^3 \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{3}{8} \varepsilon A^2. \quad (2.10.18)$$

$\theta(t)$ için çözüm yapılırsa,

$$\theta = \frac{3}{8} \varepsilon A^2 t + \theta_0, \quad (2.10.19)$$

elde edilir. Burada θ_0 sabittir. Bundan dolayı ilk yaklaşıma göre Duffing denkleminin çözümü;

$$u = A \cos \left\{ \left(1 + \frac{3}{8} \varepsilon A^2 \right) t + \theta_0 \right\}, \quad (2.10.20)$$

dir. Bu çözüm sadece ε 'nin küçük değerleri için geçerlidir.

2.11. Averaj Metodu Üzerine

Bu bölüm Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky metodunu önerir. Lineer olmayan,

$$u'' + u = f(u, u'). \quad (2.11.1)$$

salınımını göz önünde bulunduralım. (2.11.1)'i ,

$$u'' + \omega^2 u = F(u, u'), \quad (2.11.2)$$

formunda tekrar yazalım. Burada ω salınımın frekansı olarak belirlenir, ve F ,

$$F(u, u') = f + (\omega^2 - 1)u. \quad (2.11.3)$$

şeklindedir. Eğer $F = 0$ olursa (2.11.1)

$$u'' + \omega^2 u = 0 \quad (2.11.4)$$

lineer denkleme indirgenir.

(2.11.4)'ün çözümü,

$$u = A \cos(\omega t + \theta), \quad (2.11.5)$$

formunda yazılabilir. A ve θ sabittir. (2.11.1)'in çözümün,

$$u = A(t) \cos(\omega t + \theta), \quad (2.11.6)$$

formuna sahip olduğunu varsayalım, Burada A t 'nin fonksiyonu olarak belirlenir. Bu varsayılan çözümün iki kez diferansiyelini alarak,

$$u'' = A'' \cos(\omega t + \theta) - 2\omega A' \sin(\omega t + \theta) - A\omega^2 \cos(\omega t + \theta) \quad (2.11.7)$$

olarak elde edilir. (2.11.6)'yı ve (2.11.7)'yi yerine koyarak,

$$A'' \cos(\omega t - \theta) - 2\omega A' \sin(\omega t + \theta) = F. \quad (2.11.8)$$

denklemini elde ederiz. F 'yi Fourier serisine açarsak,

$$F = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (2.11.9)$$

elde edilir. Burada;

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T F dt, \quad T = 2\pi / \omega$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F \cos n\omega t dt, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F \sin n\omega t dt, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Eğer f $T = 2\pi / \omega$ periyodu ile periodik bir fonksiyon ise a_0 tamamen yok olduğunu not edelim. Eğer a_0 sıfırdan farklıysa, (2.11.2),

$$u'' + \omega^2 u + \beta = F(u, u') \quad (2.11.10)$$

olarak değiştirilmelidir. Burada,

$$F(u, u') = B + f + (\omega^2 - 1)u \quad (2.11.11)$$

olup, (2.11.10)'un çözümü,

$$u = A(t) \cos \omega t - \frac{B}{\omega^2}, \quad (2.11.12)$$

formunda varsayılır. Burada B,

$$-\frac{B}{\omega^2} = \frac{1}{T} \int_0^T F dt. \quad (2.11.13)$$

bağıntısından belirlenen bir sabittir. (2.11.12)'yi (2.11.10)'da yerine koyarak, $n \geq 2$ olduğunda $\sin n(\omega t + \theta)$ ve $\cos n(\omega t + \theta)$ 'nin terimlerini ihmal ederek ve $\sin(\omega t + \theta)$ ve $\cos(\omega t + \theta)$ 'nin katsayılarını her iki tarafta eşitleyerek,

$$A'' = \frac{2}{T} \int_0^T F \cos \omega t dt, \quad (2.11.14)$$

$$-2\omega A' = \frac{2}{T} \int_0^T F \sin \omega t dt. \quad (2.11.15)$$

elde edilir.

Yeni averaj yöntemini (2.11.1) denklem formuna sahip diferansiyel denklemlere uygulayacağız.

Örnek 1

$f = -\varepsilon u^3$ olsun. Bunun,

$$u'' + u + \varepsilon u^3 = 0. \quad (2.11.16)$$

Diferansiyel denkleminin karşılık gelir ve,

$$\begin{aligned} F &= -\varepsilon u^3 + (\omega^2 - 1)u = -\varepsilon A^3 \cos^3(\omega t + \theta) + (\omega^2 - 1)A \cos(\omega t + \theta) \\ &= (\omega^2 - 1 - \frac{3}{4}\varepsilon A^2)A \cos(\omega t + \theta) - \frac{1}{4}\varepsilon A^3 \cos 3(\omega t + \theta) \end{aligned} \quad (2.11.17)$$

Bundan dolayı,

$$A'' = (\omega^2 - 1 - \frac{3}{4}\varepsilon A^2)A, \quad (2.11.18)$$

$$-2\omega A' = 0. \quad (2.11.19)$$

elde edilir. (2.11.19)'dan A = sabit'ine sahip oluruz. Sonucu (2.11.20) denklemini (2.11.18)'de yerine koyarak,

$$\omega = \sqrt{1 + \frac{3}{4}\varepsilon A^2}, \quad (2.11.21)$$

bulunur. Burada hata, A ve ε 'nin herhangi bir değeri için tam periyodunun %7.6'sından daha azdır.

Örnek 2

Aşağıdaki forma sahip, lineer denklemi göz önünde bulunduralım.

$$u'' + u + \varepsilon u' = 0, \quad \varepsilon > 0 \quad (2.11.22)$$

Tam çözümlü isteyerek elde etsek de, bu misali metodumuzu örneklerle anlatmak, verimliliğini geliştirmek için kullanacağız.

Bu örnekte;

$$F = -\varepsilon u' + (\omega^2 - 1)u = [(\omega^2 - 1)A - \varepsilon A'] \cos(\omega t + \theta) + \varepsilon A \omega \sin(\omega t + \theta). \quad (2.11.23)$$

olup, A ve ω tekrar,

$$A'' = (\omega^2 - 1)A - \varepsilon A' \quad (2.11.24)$$

$$-2\omega A' = \varepsilon A \omega \quad (2.11.25)$$

denklemleriyle belirlenir.

(2.11.25)'i kolaylaştırmak için,

$$A' + \frac{1}{2} \varepsilon A = 0. \quad (2.11.26)$$

yazılır. Böylece (2.11.26)'nın çözümü,

$$A = a e^{-\varepsilon t/2}. \quad (2.11.27)$$

biçimindedir. Sonucu (2.11.27) denklemini (2.11.24)'te yerine koyarak ve sonuç açılımını basitleştirerek,

$$\frac{\varepsilon^2}{4} = (\omega^2 - 1) + \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad (2.11.28)$$

olarak yazarız.

Bundan dolayı,

$$u = ae^{-\frac{1}{2}\varepsilon t} \cos\left[\left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2\right)^{1/2}t + \theta\right], \quad (2.11.30)$$

yaklaşık çözümü elde edilir. Bu tam çözümdür.

Standart Krylov-Bogoliubov ilk yaklaşımı ise

$$u = ae^{-\frac{1}{2}\varepsilon t} \cos(t + \theta), \quad (2.11.31)$$

şeklindedir [2].

Örnek 3

Son örnekte, Vander Pol denkleminde göz atalım;

$$u'' + u = \varepsilon(1 - u^2)u'. \quad (2.11.32)$$

Bir önceki örnekteki gibi,

$$\begin{aligned} F &= \varepsilon(1 - u^2)u' + (\omega^2 - 1)u \\ &= \varepsilon\left[1 - A^2 \cos(\omega t + \theta)\right]\left[(A' \cos(\omega t + \theta) - A \omega \sin(\omega t + \theta))\right] + (\omega^2 - 1)A \cos(\omega t + \theta) \\ &= \left[\varepsilon A' - \frac{3}{4}\varepsilon A^2 A' + (\omega^2 - 1)A\right] \cos(\omega t + \theta) - \varepsilon\left(1 - \frac{1}{4}A^2\right)A \omega \sin(\omega t + \theta), \end{aligned} \quad (2.11.33)$$

Yeni metodun yaklaşımında,

$$A'' = \varepsilon A' - \frac{3}{4}\varepsilon A^2 + (\omega^2 - 1)A. \quad (2.11.34)$$

$$-2\omega A' = -\varepsilon \left(1 - \frac{1}{4}A^2\right) A \omega. \quad (2.11.35)$$

elde edilir. (2.11.35) denklemini basit olarak,

$$A' = \frac{\varepsilon}{2} A \left(1 - \frac{1}{4}A^2\right). \quad (2.11.36)$$

biçiminde yazılır.

$t \rightarrow \infty$ durumunda $A = 2$ olduğu açıktır ve bu da klasik perturbasyon metodu ile uyumludur.

Böylece (2.11.36) denkleminin çözümü,

$$A^2 = \frac{4}{1 + \left(\frac{4}{A_0^2} - 1\right)e^{-\varepsilon t}}. \quad (2.11.37)$$

şeklindedir. Şimdi

(2.11.37)'i (2.11.34)'de yerine koyarak,

$$\omega = \sqrt{1 + \frac{A'' - \varepsilon A' + \frac{3}{4}\varepsilon A^2 A'}{A}} \quad (2.11.38)$$

elde edilir.

Bu bize, frekansın, zamanla değişen genişlik üzerine dayandığını gösterir.

3.HOMOTOPI PERTURBASYON METODU

3.1. Giriş

Eğer f ve g , X 'ten Y 'ye dönüşüm iseler (örneğin sürekli fonksiyonlar) ve $F: X \times I \rightarrow Y$ olacak şekilde $F(x,0) = f(x)$ ve $F(x,1) = g(x)$, $x \in X$ var ise, f g 'ye göre homotopiktir deriz.

Örnek olarak aşağıdaki homotopik fonksiyon yazılabilir.

$$F(x,p) = pg(x) + (1-p)f(x), p \in [0,1] \quad (3.1.1)$$

(3.1.1) denkleminde $p = 0$ olduğu zaman denklem $f(x)$, ve $p = 1$ olduğu zaman eşitlik $g(x)$ olur. Bu yüzden sıfırdan 1'e p 'nin değişim işlemi $f(x)$ den $g(x)$ 'e $F(\xi,p)$ 'in değeridir. Homotopi diferansiyel topolojinin önemli bir parçasıdır. Homotopi teknikleri lineer olmayan cebirsel denklemlerin bütün köklerini bulmak için uygulanır. Basit bir örnekle açıklamak istersek aşağıdaki lineer olmayan cebirsel denklemi göz önünde bulundurabiliriz.

$$f(x) = 0, x \in \mathbb{R}, \quad (3.1.2)$$

[1,2]yi sağladığı gibi $\mathbb{R} \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ bir homotopi çizeriz.

$$H(\xi,p) = p \cdot f(\xi) + (1-p)[f(\xi) - f(x_0)] = 0, x \in \mathbb{R}, p \in [0,1] \quad (3.1.3a)$$

$$\text{veya } H(\xi,p) = f(\xi) - f(x_0) + pf(x_0) = 0, x \in \mathbb{R}, p \in [0,1] \quad (3.1.3b)$$

p 'nin bir parametre olduğu yerde x_0 (3.1.2) denkleminin başlangıç yaklaşımıdır.

Aşıkarak olarak,

$$H(\xi, 0) = f(\xi) - f(x_0) = 0, \quad (3.1.4)$$

$$H(\xi, 1) = f(\xi) = 0 \quad (3.1.5)$$

Sıfırdan bire p 'nin değişim işlemi $[f(\xi) - f(x_0)]$ 'ten $f(\xi)$ 'ye $H(\xi, p)$ 'dir. Topolojide buna deformasyon denir, $f(\xi) - f(x_0)$ ve $f(\xi)$ 'ler homotopik olarak adlandırılır. $0 \leq p \leq 1$ aralığında olduğundan dolayı bu parametre, bir küçük parametre gibi göz önünde bulundurulabilir. Pertürbasyon tekniğini uygularken, farz edelim ki denklemin (3.1.3) çözümü $\xi = \xi_0 + p\xi_1 + p^2\xi_2$ (3.1.6) gibi ifade edilir. $p, 1$ 'e giderken ($p \rightarrow 1$), (3.1.3) denklemi (3.1.2) denklemine eşleniyor ve (3.1.6) denklemi, (3.1.2) denkleminin yaklaşık çözümü oluyor. Örnek olarak,

$$x = \lim_{p \rightarrow 1} \xi = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 \dots \quad (3.1.7)$$

(3.1.3) denkleminin yaklaşık çözümünü elde ederken, ilk olarak $f(\xi)$ fonksiyonunu Taylor serisine göre açarız.

$$f(\xi) = f(\xi_0) + f'(\xi_0)(p\xi_1 + p^2\xi_2 + \dots) + \frac{1}{2!} f''(\xi_0)(p\xi_1 + p^2\xi_2 + \dots)^2 + \dots \quad (3.1.8)$$

(3.1.3b) denkleminde (3.1.8)'i ve eşit kuvvetli p 'lerin katsayılarını yerine koyarak

$$p^0 : f(\xi_0) - f(x_0) = 0 \quad (3.1.9)$$

$$p^1 : f'(\xi_0)\xi_1 + f(x_0) = 0 \quad (3.1.10)$$

$$p^2 : f'(\xi_0)\xi_2 + \frac{1}{2!} f''(\xi_0)\xi_1^2 = 0 \quad (3.1.11)$$

$$f'(\xi_0)\xi_3 + \frac{1}{2!}f''(\xi_0)2\xi_1\xi_2 + \frac{1}{3!}f'''(\xi_0)\xi_1^3 = 0 \quad (3.1.12)$$

elde edilir.

Yukarıdaki denklemlerden ξ_1 , ξ_2 ve ξ_3 ,

$$\xi_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(\xi_0)} \quad (3.1.13)$$

$$\xi_2 = -\frac{f''(\xi_0)\xi_1^2}{2!f'(\xi_0)} = -\frac{f''(\xi_0)}{2!f'(\xi_0)}\left(\frac{f(x_0)}{f'(\xi_0)}\right)^2 \quad (3.1.14)$$

$$\xi_3 = -\frac{f''(\xi_0)\xi_1\xi_2}{f'(\xi_0)} - \frac{f'''(\xi_0)\xi_1^3}{3!f'(\xi_0)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{f''(\xi_0)}{f'(\xi_0)}\right)^2\left(\frac{f(x_0)}{f'(\xi_0)}\right)^3 + \frac{f'''(\xi_0)}{6f'(\xi_0)}\left(\frac{f(x_0)}{f'(\xi_0)}\right)^3 \quad (3.1.15)$$

biçiminde bulunur.

$p = 1$ alarak, aşağıdaki 1. dereceden yaklaşık çözüm elde edilir.

$$x = \xi_0 + \xi_1 = \xi_0 - \frac{f(\xi_0)}{f'(\xi_0)}, \quad (3.1.16)$$

Bu çözüm aynı zamanda bir iterasyon formülü olarak ta yazılabilir.

$$x_{n+1} = \xi_n - \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} \quad (3.1.17)$$

(3.1.19) denkleminin bir çözümü $\xi_0 = x_0$ dır. (3.1.7) formülünde sonucu yerine koyarak iyi bilinen bir Newton iterasyon formülü

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (3.1.18)$$

olarak bulunur.

Benzer olarak ikinci dereceden yaklaşık çözümü

$$x = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 \quad (3.1.19)$$

bulunur veya bir iterasyon formülü

$$x_{n+1} = \xi_n - \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} - \frac{f''(\xi_n)}{2f'(\xi_n)} \left\{ \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} \right\}^2 \quad (3.1.20a)$$

aşağıdaki iterasyon formülüne [1,2] dahil ediliyor

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)} \left\{ \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right\}^2 \quad (3.1.20b)$$

3. dereceden yaklaşık çözüm

$$x = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \quad (3.1.21)$$

veya [1,2]'deki iterasyon formülü

$$x_{n+1} = \xi_n - \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} - \frac{f''(\xi_n)}{2f'(\xi_n)} \left\{ \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} \right\}^2 - \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{f''(\xi_n)}{f'(\xi_n)} \right)^2 - \frac{f'''(\xi_n)}{6f'(\xi_n)} \right\} \left\{ \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} \right\}^3 \quad (3.1.22a)$$

aşağıdaki iterasyon formülü gibi yazılır;

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)} \left\{ \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right\}^2 - \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)} \right)^2 - \frac{f'''(x_n)}{6f'(x_n)} \right\} \left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right)^3$$

(3.1.22b)

Örnek 1

2. dereceden polinom $f(x) = x^2 + x - 2 = 0$

Çözüme başlangıç değeri olarak $x_0 = 0$ la başlarız, (3.1.9)daki denklemden $\xi_0^{(1)} = 0$ ve $\xi_0^{(2)} = -1$ değerlerine ulaşırız.

(3.1.20a) denklemden $x_1^{(1)} = -2$ ve $x_1^{(2)} = 1$ gerçek çözümlerini elde ederiz.

Örnek 2

Aşağıdaki denklemin $x = 0$ daki kökünü bulun. $F(x) = x - \varepsilon \operatorname{Cosh}x$.

$x_0 = 0$ 'la başlayarak (3.1.20b) denklemden sadece bir iterasyonla $x_1 = \varepsilon + \varepsilon^3/2$ 'ye ulaşılır.

$\varepsilon = 0,20$, $x_1 = 0,4919$ olduğunda, denklemin gerçek çözümü 0.5050 dir.

$x = a$ ve $x = b$ yaklaşık iki çözümünü bulmak istersek, aşağıdaki gibi bir homotopi kurarız.

$$(1-p)(x-a)(x-b) + pf(x) = 0$$

(3.1.23)

veya denk olarak

$$(x-a)(x-b) - p(x-a)(x-b) + pf(x) = 0 \quad (3.1.24)$$

(3.1.24) denkleminin bir çözümü

$$x = x_0 + pc_1 + p^2c_2 + \dots \quad (3.1.25)$$

(3.1.25) p'den bağımsız katsayılarla p'deki bir kuvvet serisine sahiptir.

Açık olarak, $p = 0$ kullanıldığında elde edilen x_0 baş terimi

$$x_0 = \begin{cases} a \\ b \end{cases} \quad (3.1.26)$$

değerlerini alarak başlangıç çözümü farzedilir.

Ardışık katsayıları c_1, c_2, \dots aşağıdakiler gibi çözülür,

$$c_1 = -\frac{f(x_0)}{2x_0 - a - b} \quad (3.1.27)$$

$$c_2 = -\frac{x_1^2 + x_1 f'(x_0) - f(x_0)}{2x_0 - a - b} \quad (3.1.28)$$

Denklemden $p = 0$ alınarak elde edilen 1. dereceden yaklaşık çözüm:

$$x_1 = x_0 + c_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{2x_0 - a - b} \quad (3.1.29)$$

veya $x_n^{(1)}$ ve $x_n^{(2)}$ lerin n.dereceden yaklaşık çözümü olan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2x_n - x_n^{(1)} - x_n^{(2)}} \quad (3.1.30)$$

bir iterasyon formülüdür.

2.dereceden yaklaşık çözüm

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 - \frac{f(x_0)}{2x_0 - a - b} - \frac{x_1^2 + x_1 f'(x_0) - f(x_0)}{2x_0 - a - b} \\
 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{2x_0 - a - b} - \frac{\left(\frac{f(x_0)}{2x_0 - a - b}\right)^2 - \frac{f(x_0)f'(x_0)}{2x_0 - a - b} - f(x_0)}{2x_0 - a - b} \\
 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{2x_0 - a - b} - \frac{f^2(x_0) - (2x_0 - a - b)f(x_0)f'(x_0) - (2x_0 - a - b)^2 f(x_0)}{(2x_0 - a - b)^3}
 \end{aligned} \tag{3.1.31}$$

veya bir iterasyon formülü

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{2x_n - x_n^{(1)} - x_n^{(2)}} \\
 &= \frac{f^2(x_n) - (2x_n - x_n^{(1)} - x_n^{(2)})f(x_n)f'(x_n) - (2x_n - x_n^{(1)} - x_n^{(2)})^2 f(x_n)}{(2x_n - x_n^{(1)} - x_n^{(2)})^3}
 \end{aligned} \tag{3.1.32}$$

olarak bulunur.

Örnek 3

Aşağıdaki denklemin kökleri yaklaşık $x = 3$ ve $x = 6$ olarak bulundu.

$$\sin x = 0 \tag{3.1.33}$$

(3.1.30) denklemini iterasyon formülü tarafından

<u>İterasyon</u>	<u>\underline{x}</u>	<u>\underline{x}</u>
0	3	6
1	3.047	6.093
2	3.078	6.155
3	3.098	6.215
4	3.112	6.236

değerlerini elde ederiz. Bu serilerin gerçek çözüme yakınsadığı aşikardır. x_0 'a yakın 2 kökü bulmak için, aşağıdaki homotopiyi kurmalıyız;

$$(1-p) \left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 \right] + pf(x) = 0 \quad (3.1.34)$$

Örneğin, $x = \pi/2$ yaklaşık değeri için aşağıdaki denklemin 2 kökünü araştırınız.

$$f(x) = \sin x \quad (3.1.35)$$

(3.1.34) denklemine göre aşağıdaki homotopiyi kurabiliriz.

$$(1-p) \left[1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2 \right] + p \sin x = 0 \quad (3.1.36)$$

$$\text{Önceki prosedürde } x_0 = \begin{cases} 2.985 \\ 0.1565 \end{cases} \quad \text{ve} \quad x_1 = \begin{cases} 0.11027 \\ -0.11020 \end{cases} \quad \text{değerlerine}$$

sahipler. Bu yüzden yüksek doğruluğun 1 nci yaklaşık çözümleri

$x = x_0 + x_1 = \begin{cases} 3.095 \\ 0.0463 \end{cases}$ dür. Tabiki de, eğer ihtiyacımız olursa diğer

homotopileri de kurarız.

3.2.Homotopi Perturbasyon Metodu

Homotopi Perturbasyon Metodu [1-10] alışılmamış ve etkileyici bir method ve çeşitli lineer olmayan denklemleri çözer.

Özetle bu yeni methodun ana fikri, aşağıdaki lineer olmayan denklemin

$$A(u)-f(r)=0 \quad r \in \Omega \quad (3.2.1)$$

A nın genel diferansiyel operatörü olduğu, B nin sınır operatörü olduğu, $f(r)$ nin bilinmeyen analitik fonksiyon olduğu, Γ 'nın Ω tanım kümesinin sınırı olduğu

$$B(u, \partial u / \partial n) = 0, \quad r \in \Gamma \quad (3.2.2)$$

sınır koşullarıyla göz önünde bulundururuz.

A operatörü L ve N gibi iki parçaya ayrılabilir olup, L lineer iken N lineer değildir. (3.2.1) denklemi aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \quad (3.2.3)$$

Homotopi tekniğinden dolayı

$$H(v,p) = (1-p) [L(v)-L(u_0)] + p[A(v) -f(r)] = 0 \quad (3.2.4a)$$

veya

$$H(v,p) = L(v)-L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v)-f(r)] = 0 \quad (3.2.4b)$$

denklemlerini sağlayan bir parametre olan $p \in (0,1)$ ve genel sınır koşulunu sağlayan (3.2.1) denkleminin başlangıç yaklaşımı u_0 'ın olduğu $v(r,p): \Omega \times [0,1] \times \mathbb{R}$ bir homotopi kurarız.

Açıkça, (3.2.4a) veya (3.2.4b) denklemlerinden

$$H(v,0) = L(v) - L(u_0) = 0 \quad (3.2.5)$$

$$\text{ve} \quad H(v,1) = A(v) - f(r) = 0 \quad (3.2.6)$$

denklemleri elde edilir.

$p = 0$ olduğunda (3.2.4) denklemi lineer bir denklem haline geldiği açıktır. $p = 1$ olduğunda ise lineer olmayan orijinal bir denklem olur. Bu yüzden 0'dan 1'e p nin değişim işlemi $L(v) - L(u_0) = 0$ denkleminin $A(v) - f(r)$ denklemine dönüşüdür. $L(v) - L(u_0) = 0$ aşıkâr problemi gibi 0'dan 1'e monoton olarak artan p parametresi, sürekli olarak $A(v) - f(r) = 0$ problemine deforme olur. Homotopi methodunun temel amacı zor problemi bu çalışmalar altında çözebilecek kolay probleme indirmektir. Homotopi Pertürbasyon Metodu [1-10] küçük bir parametre gibi p parametresini kullanır.

(3.2.4) denkleminin çözümü basit bir düşünceyle p nin bir kuvvet serisi gibi yazılır:

$$v = v_0 + p v_1 + p^2 v_2 + \dots \quad (3.2.7)$$

$p = 1$ 'e giderken (3.2.1) denkleminin yaklaşım çözüm sonucu:

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (3.2.8)$$

bulunur.

(3.2.7) serisi p nin tüm çözüm bölgesinde yakınsak olabilir. Pertürbasyon metodunun çift metodu ve homotopi metodu, homotopi pertürbasyon metodu olarak adlandırılır. Son zamanlarda homotopi pertürbasyon metodu oldukça geliştirildi. Bu metot, geleneksel pertürbasyon metodunun sınırlandırmalarını kaldırır. Çeşitli pertürbasyon tekniklerinin tüm avantajlarını alarak geliştirilmiştir.

Örnek 1

$$\text{Duffing denklemini } u'' + u + \varepsilon u^3 = 0, \quad \varepsilon > 0 \quad (3.2.9)$$

$u(0)=A$ ve $u'(0)=0$ başlangıç koşullarıyla göz önünde bulunduralım. Fiziksel sebepler bu denklemin bir periyodik çözümünün olduğunu gösterir. Sırayla $\varepsilon \gg 1$ ise periyodik çözüm araştırılır. Farzedelim ki (3.2.9)un frekansı w olsun ve (3.2.9) denklemini $u'' + w^2 u = 0$ gibi lineer şekilde olsun. Aşağıdaki homotopiyi kuralım:

$$u'' + w^2 u + p (\varepsilon u^3 + (1 - w^2)u) = 0, \quad p \in [0, 1] \quad (3.2.10)$$

$p = 0$ iken (3.2.10) denklemini $u'' + w^2 u = 0$ lineer denkleme haline gelir, $p = 1$ iken de orijinal denkleme dönüşür. Farzedelim ki (3.2.10) denklemini periyodik çözümü p nin bir kuvvet serisi gibi yazabiliriz:

$$u = u_0 + p u_1 + p^2 u_2 + \dots \quad (3.2.11)$$

(3.2.10) denkleminde (3.2.11) denklemini koyarsak, p nin aynı kuvvetlerinin toplam terimleri şu şekilde verilir.

$$u_0'' - \omega^2 u_0 = 0, \quad u_0(0) = A, \quad u_0'(0) = 0 \quad (3.2.12)$$

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + \varepsilon u_0^3 + (1 - \omega^2)u_0 = 0, \quad u_1(0) = 0, \quad u_1'(0) = 0 \quad (3.2.13)$$

$u_0 = A \cos \omega t$ olarak verildiğinde (3.2.12) denklemi kolayca çözülebilir. Eğer u_0 'ı (3.2.13) denklemine yerine koyduğumuzda ve sonuç denklemini sadeleştirdiğimizde

$$u_1'' - \omega^2 u_1 + \left(1 + \frac{3}{4} \varepsilon A^2 - \omega^2\right) A \cos \omega t + \frac{1}{4} \varepsilon A^3 \cos 3\omega t = 0 \quad (3.2.14)$$

denklemini elde ederiz.

$$u_1 \text{ deki seküler terim yok edilirse } \omega = \sqrt{1 + \frac{3}{4} \varepsilon A^2} \quad (3.2.15)$$

elde edilir. (4.1.29) denkleminin bağıl hatası $\varepsilon \rightarrow \infty$ 'a giderken % 7.6 dır. Daha yüksek yaklaşık çözümleri için seküler terimleri meydana gelir, bu yüzden her zaman önce 2 nci iterasyonu durdururuz. Eğer yüksek mertebeden çözüm gerekirse modifiye Lindstedt-Poincaré metodu uygulanabilir. Bölüm 2'ye bakınız. Örnek olarak, aşağıdaki homotopiyi kurarız:

$$u'' + 1 \cdot u + p \varepsilon u^3 = 0 \quad (3.2.16)$$

$$1 = \omega^2 + p \omega_1 + p^2 \omega_2 + \dots \quad (3.2.17)$$

burada w_1, u_1 'deki seküler terimlerin yok edilmesinden bulunabilir;

$$\omega_1 = -\frac{3}{4} \varepsilon A^2, \quad \omega_2 = -\frac{3}{128 \omega^2} \varepsilon^2 A^4 \quad (3.2.18)$$

$p = 1$ ve (3.2.18)'i, (3.2.17) denkleminde yerine koyarsak

$$1 = \omega^2 - \frac{3}{4} \varepsilon A^2 - \frac{3}{128\omega^2} \varepsilon^2 A^4 \quad (3.2.19)$$

veya

$$\omega = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{4} \varepsilon A^2 + \sqrt{1 + \frac{3}{2} \varepsilon A^2 + \frac{5}{8} \varepsilon^2 A^4}}{2}} \quad (3.2.20)$$

denklemlerini elde ederiz.

(3.2.20) denkleminin bağıl hatası $\varepsilon \rightarrow \infty$ a giderken % 5.9'a ulaşıyor. Gene de belli formda bir homotopi kurabiliriz.

$$(1-p)(v'' + \omega^2 v - u_0'' - \omega^2 u_0) + p(v'' + v + \varepsilon v^3) = 0 \quad (3.2.21)$$

Basit bir işlemle

$$v_0'' + \omega^2 v_0 - u_0'' - \omega^2 u_0 = 0 \quad (3.2.22)$$

$$v_1'' + \omega^2 v_1 - (v_0'' + \omega^2 v_0 - u_0'' - \omega^2 u_0) + (v_0'' + v_0 + \varepsilon v_0^3) = 0 \quad (3.2.23)$$

denklemlerini elde ederiz.

$$v_0 = u_0 = A \cos \omega t \quad (3.2.24)$$

değeriyle başlayalım.

(3.2.23) denkleminde (3.2.24) değerini yerine koyarsak

$$v_1'' + \omega^2 v_1 + a \left(-\omega^2 + 1 + \frac{3}{4} \varepsilon A^2 \right) \cos \omega t + \frac{1}{4} \varepsilon A^3 \cos 3\omega t = 0 \quad (3.2.25)$$

(3.2.14) denklemine denk bir denklem elde ederiz.

Örnek 2

Kuvvet oskilasyonunu göz önünde bulunduralım.

$$u'' + u + \varepsilon u^3 = q \cos \Omega t, \quad u(0) = A, \quad u'(0) = 0, \quad (3.2.26)$$

Burada, Ω 'nın serbest vibrasyonunun kuvvetli frekansı, p 'nin kuvvetli genliğidir.

Çalışmalarımızda ε ve q 'nin küçük değerler olmasına ihtiyaçları yoktur. Burada (3.2.26) denklemini

$$u'' + 1.u + p\varepsilon u^3 = q \cos \Omega t, \quad u(0) = A, \quad u'(0) = 0 \quad (3.2.27)$$

formunda yeniden yazarız. Farzedelim ki (3.2.27) denkleminin çözümü (3.2.11) formunda ifade edilebilir ve (3.2.17) deki örnekte izah edildiği gibi p nin bir serisindeki lineer terimlerinin katsayıları pertürbasyon tekniğinin geleneksel metodu ile şu şekilde elde edilebilir;

$$u_0'' + \omega^2 u_0 = q \cos \Omega t, \quad u_0(0) = A, \quad u_0'(0) = 0 \quad (3.2.28)$$

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + \omega_1 u_0 + \varepsilon u_0^3 = 0 \quad u_1(0) = 0, \quad u_1'(0) = 0 \quad (3.2.29)$$

$$m = A - \frac{q}{\omega^2 - \Omega^2}, \quad n = \frac{q}{\omega^2 - \Omega^2} \text{ değerleri alınarak (3.2.28) çözülmüş}$$

denkleminin sonuçları

$$u_0 = A \cos \omega t - \frac{q}{\omega^2 - \Omega^2} (\cos \omega t - \cos \Omega t) = m \cos \omega t + n \cos \Omega t \quad (3.2.30)$$

dır.

Bu nedenle (3.2.29) denklemi

$$\begin{aligned}
 u_1'' + \omega^2 u_1 + \omega_1 (m \cos \omega t + n \cos \Omega t) + \frac{3}{4} m^3 \varepsilon \cos \omega t + \frac{1}{4} m^3 \varepsilon \cos 3\omega t + \frac{3}{4} n^3 \varepsilon \cos \Omega t \\
 + \frac{1}{4} n^3 \varepsilon \cos 3\Omega t + \frac{3}{2} m^2 n \varepsilon \cos \Omega t + \frac{3}{4} m^2 n \varepsilon [\cos(2\omega + \Omega)t + \cos(2\omega - \Omega)t] \\
 + \frac{3}{2} m n^2 \varepsilon \cos \omega t + \frac{3}{4} m n^2 \varepsilon [\cos(\omega + 2\Omega)t + \cos(\omega - 2\Omega)t] = 0 \quad (3.2.31a)
 \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
 u_1'' + \omega^2 u_1 + \left(nm + \frac{3}{4} m^3 \varepsilon + \frac{3}{2} m n^2 \varepsilon \right) \cos \omega t + \left(\omega_1 n + \frac{3}{4} n^3 \varepsilon + \frac{3}{2} m^2 n \varepsilon \right) \cos \Omega t \\
 + \frac{1}{4} m^3 \varepsilon \cos 3\omega t + \frac{1}{4} n^3 \varepsilon \cos 3\Omega t + \frac{3}{4} m^2 n \varepsilon [\cos(2\omega + \Omega)t + \cos(2\omega - \Omega)t] \\
 + \frac{3}{4} m n^2 \varepsilon [\cos(\omega + 2\Omega)t + \cos(\omega - 2\Omega)t] = 0 \quad (3.2.31b)
 \end{aligned}$$

formlarında yeniden yazılabilir.

Seküler terimi yok etmek için aşağıdaki denklemi kullanırız;

$$\omega_1 m + \frac{3}{4} m^3 \varepsilon + \frac{3}{2} m n^2 \varepsilon = 0 \quad (3.2.32a)$$

$$\text{veya} \quad \omega_1 = -\frac{3}{4} (m^2 + 2n^2) \varepsilon \quad (3.2.32b)$$

(3.2.31) denklemini çözersek:

$$\begin{aligned}
u_1 = & \frac{\omega_1 n + \frac{3}{4} n^3 \varepsilon + \frac{3}{2} m^2 n \varepsilon}{\omega^2 - \Omega^2} (\text{Cos} \omega t - \text{Cos} \Omega t) - \frac{m^3 \varepsilon}{32} (\text{Cos} \omega t - \text{Cos} 3\omega t) \\
& + \frac{n^3 \varepsilon}{4(\omega^2 - 9\Omega^2)} (\text{Cos} \omega t - \text{Cos} 3\Omega t) + \frac{3m^2 n \varepsilon}{4(\omega^2 - (2\omega + \Omega)^2)} [\text{Cos} \omega t - \text{Cos}(2\omega + \Omega)t] \\
& + \frac{3m^2 n \varepsilon}{4(\omega^2 - (2\omega - \Omega)^2)} [\text{Cos} \omega t - \text{Cos}(2\omega - \Omega)t] + \frac{3mn^2 \varepsilon}{4(\omega^2 - (\omega + 2\Omega)^2)} [\text{Cos} \omega t - \text{Cos}(\omega + 2\Omega)t] \\
& + \frac{3mn^2 \varepsilon}{4(\omega^2 - (\omega - 2\Omega)^2)} [\text{Cos} \omega t - \text{Cos}(\omega - 2\Omega)t] \tag{3.2.33}
\end{aligned}$$

Eğer birinci dereceden yaklaşık çözüm yeterli ise, (3.2.17) denkleminde $p = 1$ 'e yaklaşırken,

$$1 = \omega^2 - \frac{3}{4}(m^2 + 2n^2)\varepsilon = \omega^2 - \frac{3}{4}\varepsilon \left[\left(A - \frac{p}{\omega^2 - \Omega^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{p}{\omega^2 - \Omega^2} \right)^2 \right] \tag{3.2.34}$$

Dolayısıyla ω frekansı bu denklemden elde edilir. Burada düzeltilmiş seride 1 inci terime kadar araştırmamızı kısıtlıyoruz, böylece 1 inci dereceden

$$u = u_0 + u_1 \tag{3.2.35}$$

çözümü elde ederiz.

Burada u_0 ve u_1 sırasıyla (3.2.30) ve (3.2.33) denklemlerinden tanımlanmıştır.

Bu aşıkardır ki geleneksel $\omega = \Omega$, $\omega = \frac{1}{3}\Omega$ ve $\omega = 3\Omega$ olduğunda ortaya çıkar.

Küçük ε değeri için, elde edilen sonuçlar geleneksel pertürbasyon metodlarından [11] elde edilenlerle aynıdır.

Örnek 3

Bunun etkilerini ve sonuçlarını açıklayarak diğer örneği veririz.

$$u'' + 1 \cdot u + \varepsilon u^2 u'' = 0 \quad , \quad u(0) = A, \quad u'(0) = 0 \quad (3.2.36)$$

bu denklem

$$u'' + 1u + \varepsilon p u^2 u'' = 0 \quad , \quad u(0) = A \quad , \quad u'(0) = 0 \quad (3.2.37)$$

formunda yeniden yazılabilir.

Pertürbasyon tekniğinin bir geleneksel yöntemini

$$u'' + \omega^2 u_0 = 0, \quad u_0(0) = A, \quad u_0'(0) = 0 \quad (3.2.38)$$

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + u_0^2 u_0'' + \omega_1 u_0 = 0, \quad u_1(0) = 0, \quad u_1'(0) = 0 \quad (3.2.39)$$

elde ederiz. (3.2.38) denkleminin çözümü $u_0 = A \cos \omega t$ 'dur, bu nedenle (3.2.39) denklemi;

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + \left(-\frac{3}{4} \omega^2 A^2 + \omega_1 \right) A \cos \omega t - \frac{1}{4} \omega^2 A^3 \cos 3\omega t = 0 \quad (3.2.40)$$

meydana gelir. (3.2.40) denklemindeki seküler terimi yok etmek için

$$\omega_1 = \frac{3}{4} \omega^2 A^2 \quad (3.2.41)$$

alınır. (3.2.40) denkleminin çözümünü

$$u_1 = \frac{A^3}{32} (\cos \omega t - \cos 3\omega t) \quad (3.2.42)$$

elde ederiz. Bu nedenle aşağıdaki 1 inci dereceden yaklaşık çözümü elde ederiz;

$$u = A \cos \omega t - \frac{\varepsilon A^3}{32} (\cos \omega t - \cos 3\omega t) \quad (3.2.43)$$

(3.2.17) denkleminde (3.2.41) denklemi yerine yazılırsa

$$\omega^2 + \frac{3}{4} \varepsilon \omega^2 A^2 = 1 \quad (3.2.44)$$

bulunur. Bu yüzden açısal frekansı

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{4} \varepsilon A^2}} \quad (3.2.45)$$

formunda elde edilebilir. Bunun yaklaşık periyodu

$$T = 2\pi \sqrt{1 + \frac{3}{4} \varepsilon A^2} \quad (3.2.46)$$

formunda yeniden yazılabilir. Eğer $0 < \varepsilon \leq 1$ iken, açısal frekansı

$$T = 2\pi \left(1 - \frac{3}{8} \varepsilon A^2 \right) \quad (3.2.47)$$

olup ve (3.2.43) denklemi aşağıdaki denklem ile yaklaşık değerini alır

$$u = A \cos\left(1 - \frac{3}{8} \varepsilon A^2\right) t - \frac{\varepsilon A^3}{32} \left[\cos\left(1 - \frac{3}{8} \varepsilon A^2\right) t - \cos 3\left(1 - \frac{3}{8} \varepsilon A^2\right) t \right] + O(\varepsilon^2) \quad (3.2.48)$$

Bu denklem Lindstedt Poincare metodu [11] larından elde edilen formlara benzerlik arzeder.

Şimdi (3.2.46) yaklaşık denklemini gerçek denklemle karşılaştıralım

$$T_{ex} = 4\sqrt{3} \int_0^A \frac{du}{\sqrt{\ln(1 + \varepsilon A^2) - \ln(1 + \varepsilon u^2)}} = 4\sqrt{3} \int_0^A \frac{du}{\sqrt{\ln\left[\frac{1 + \varepsilon A^2}{1 + \varepsilon u^2}\right]}} \quad (3.2.49)$$

Eğer $\varepsilon A^2 \gg 1$ iken

$$T_{ex} \approx 4\sqrt{\varepsilon} \int_0^A \frac{du}{\sqrt{2(\ln A - \ln u)}}, \quad \varepsilon A^2 \gg 1 \quad (3.2.50)$$

denklemini elde ederiz. $u = As$ dönüşümüyle yukarıdaki denklem

$$T_{ex} \approx 2\sqrt{2\varepsilon} A \int_0^A \frac{du}{\sqrt{\ln(1/s)}}, \quad \varepsilon A^2 \gg 1 \quad (3.2.51)$$

denklemine dönüşür. $s = \exp(-x^2)$ dönüşümüyle elde edilen denklem;

$$T_{ex} \approx 4\sqrt{2\varepsilon} A \int_0^\infty \exp(-x^2) dx = 2\sqrt{2\pi\varepsilon} A, \quad \varepsilon A^2 \gg 1 \quad (3.2.52)$$

Bu yüzden büyük ε değeri için $T_{ex} \sim \sqrt{\varepsilon} A$ (3.2.53) bulunur. (3.2.46)

denkleminde büyük ε için $T \sim \sqrt{\varepsilon} A$ bağıntısı elde edilir. $\varepsilon A^2 \rightarrow \infty$ 'a giderken

$$\lim_{\varepsilon A^2 \rightarrow \infty} \frac{T_{ex}}{T} = \frac{2\sqrt{2\pi} A}{\sqrt{3} \pi A} = 0,9213 \text{ sonucunu elde edilir. Bu nedenle } \varepsilon \text{ nun herhangi}$$

bir değeri için, bu kolayca ispat edilebilir ki tanım bölgesi $0 < \varepsilon A^2 < \infty$ olan çözümlerde en büyük hata % 8.54 ten daha azdır.

NOT: Biz her zaman 0 ıncı dereceden yaklaşık çözümü $u = A \cos \left[\left(1 + \frac{3}{4} \varepsilon A^2 \right)^{-1/2} t \right]$ şeklini alırız, bunun nedeni Bölüm 2’de açıklanmıştır.

Örnek 4

Şimdi Van der Pol denklemini göz önünde bulunduralım.

$$u'' + u = \varepsilon(1 - u^2)u' \quad (3.2.54)$$

Bir homotopi

$$u'' + 1.u = p\varepsilon(1 - u^2)u' \quad (3.2.55)$$

formunda kurulur.

Lineer terimlerin katsayısının (3.2.17)’deki gibi p’nin serilerine açılmasıyla ve (3.2.11) ve (3.2.17) denklemlerinin (3.2.55)de yerine koyulmasıyla

$$u_0'' + \omega^2 u_0 = 0 \quad (3.2.56)$$

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + \omega_1 u_0 = \varepsilon(1 - u_0^2)u_0' \quad (3.2.57)$$

$$u_2'' + \omega^2 u_2 + \omega_2 u_0 + \omega_1 u_1 = \varepsilon(u_1' - u_0^2 u_1' - 2u_0 u_0' u_1) \quad (3.2.58)$$

denklemlerini elde ederiz. (3.2.57)’de $u_0 = A \cos \omega t$ ’yi yerine koyarsak, aşağıdaki denklemi elde ederiz;

$$\begin{aligned}
u_1'' + \omega^2 u_1 + \omega_1 A \cos \omega t &= -\varepsilon A \omega (1 - A^2 \cos^2 \omega t) \sin \omega t \\
&= -\varepsilon A \omega \left(1 - \frac{1}{2} A^2 - \frac{1}{2} A^2 \cos 2\omega t \right) \sin \omega t \\
&= -\varepsilon A \omega \left(1 - \frac{1}{4} A^2 \right) \sin \omega t + \frac{1}{4} \varepsilon A^3 \omega \sin 3\omega t
\end{aligned} \tag{3.2.59}$$

Tekrar, u_1 'in seküler teriminin yok edilmesi ile

$$\omega_1 = 0, \quad A = 2 \text{ 'yi} \tag{3.2.60}$$

bulunur.

(3.2.59) denklemi

$$u_1'' + \omega^2 u_1 = \frac{1}{4} \varepsilon A^3 \omega \sin 3\omega t \tag{3.2.61}$$

denklemine dönüşür. Bunun özel çözümünü aşağıda yazalım;

$$u_1 = -\frac{1}{32\omega} \varepsilon A^3 \sin 3\omega t = -\frac{\varepsilon}{4\omega} \sin 3\omega t \tag{3.2.62}$$

Yukarıdaki sonuçları (3.2.58)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
u_2'' &= \omega^2 u_2 + 2\omega_2 \cos \omega t \\
&= \varepsilon \left(-\frac{3\varepsilon}{4} \cos 3\omega t + 3\varepsilon \cos 3\omega t \cos^2 \omega t - \varepsilon \sin 3\omega t \sin 2\omega t \right) \\
&= \varepsilon \left(-\frac{3\varepsilon}{4} \cos 3\omega t + \frac{3\varepsilon}{4} (\cos 5\omega t + \cos \omega t) - \frac{1}{2} \varepsilon (\cos \omega t - \cos 5\omega t) \right)
\end{aligned} \tag{3.2.63}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon \left(\frac{3\varepsilon}{4} \cos 3\omega t + \frac{3\varepsilon}{4} (\cos 5\omega t + \cos \omega t) - \frac{1}{2} \varepsilon (\cos \omega t - \cos 5\omega t) \right) \\
&= \frac{1}{4} \varepsilon^2 \cos \omega t + \frac{3}{4} \varepsilon^2 \cos 3\omega t + \frac{5}{4} \varepsilon^2 \cos 5\omega t
\end{aligned}$$

denklemini elde edilir.

Seküler terimi yok edilirse

$$\omega_2 = \frac{1}{8} \varepsilon^2 \quad (3.2.64)$$

bulunur.

Eğer 2 nci dereceden yaklaşık çözüm yeterliyse, (3.2.17) den

$$1 = \omega^2 + \frac{1}{8} \varepsilon^2 \quad (3.2.65a)$$

$$\text{veya } \omega = \sqrt{1 - \frac{1}{8} \varepsilon^2} \quad (3.2.65b)$$

denklemleri elde edilir.

Araştırmalar gösteriyor ki Van der Pol denklemi bütün $\varepsilon > 0$ lar için periyodik çözümüne sahip ve daha sonra da $\omega \sim 1/\varepsilon$ eşitliğini (2.6.37 de görülen), 2.6 bölümündeki örnekler gibi Pade yaklaşımının değişikliğinden, (3.2.67b)'yi

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{8} \varepsilon^2}} \quad (3.2.66)$$

formuna dönüştürürüz, bu bütün $\varepsilon > 0$ 'lar için geçerlidir.

(3.2.54)'ün bir aşık uzantısı

$$u'' + u = \varepsilon(1 - u^2) \text{Sign}(u') \quad (3.2.67)$$

olur. Bazı manüplasyonlarla seküler terimin yok edilmesi gerektiğinden u_1 ,

$$\int_0^T \left[\omega_1 u_0 - \varepsilon(1 - u_0^2) \text{Sign}(u_0') \right] \cos \omega t = 0 \quad (3.2.68)$$

'i verir. Basit bir işlemle $A = \sqrt{2}$ genliğinin asimtotik değerini elde ederiz, bu Mickens et al tarafından yaklaşık olarak elde edilmiştir. $A=1.633$ [12].

Örnek 5

$$(x + \varepsilon y) \frac{dy}{dx} + y = 0, \quad y(1) = 1 \quad (3.2.69)$$

Lighthill denklemini göz önünde bulunduralım. Kolayca bir homotopi kurabiliriz, bu $(1 - p) \left[\varepsilon Y \frac{dY}{dx} - \varepsilon y_0 \frac{dy_0}{dx} \right] + p \left[(x + \varepsilon Y) \frac{dy}{dx} + Y \right] = 0, \quad p \in [0, 1]$

(3.2.70) denklemini sağlar.

$$Y(x) = Y_0(x) + pY_1(x) + p^2Y_2(x) + \dots, \quad (3.2.71)$$

formunda (3.2.70) denkleminin bir çözümü elde edilmeye çalışılır, burada $Y_i(x)$ ($i=0,1,2,\dots$) ler henüz tanımlanmış fonksiyonlardır. (3.2.71)'in (3.2.70)'de yerine koyulmuş hali

$$\varepsilon Y_0 \frac{dY_0}{dx} - \varepsilon y_0 \frac{dy_0}{dx} = 0 \quad (3.2.72)$$

$$\varepsilon Y_1 \frac{dY_1}{dx} + \left[(x + \varepsilon Y_0) \frac{dY_0}{dx} + Y_0 \right] = 0 \quad (3.2.73)$$

$Y_0(0)$ veya $y_0(x)$ yaklaşım başlangıç değerleri bağımsız bir şekilde seçilebilir, burada

$$Y_0(x) = y_0(x) = -x/\varepsilon, \quad Y_0(1) = -1/\varepsilon \quad (3.2.74)$$

leri yerine koyduğumuzda (3.2.69) denkleminin rezidüsü $x = 0$ 'da yok olur.

(3.2.74)'ü (3.2.73)'de yerine konulursa

$$\varepsilon Y_1 \frac{dY_1}{dx} - \frac{x}{\varepsilon} = 0, \quad Y_1(1) = 1 + 1/\varepsilon \text{ olur.} \quad (3.2.75)$$

Bu denklemin çözümü

$$Y_1 = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{x^2 + 3\varepsilon + \varepsilon^2} \quad (3.2.76)$$

biçimindedir. Eğer 1.dereceden yaklaşık çözüm yeterliyse,

$$Y_1(x) = Y_0(x) + Y_1(x) = \frac{1}{\varepsilon} \left(-x + \sqrt{x^2 + 2\varepsilon + \varepsilon^2} \right) \quad (3.2.77)$$

gerçek çözümünü elde ederiz.

Örnek 6

$$\frac{dy}{dt} - y^2 - t^2 = 0, \quad y(0) = 1 \quad (3.2.78)$$

çok basit başka bir başlangıç değer problemini [13] göz önünde bulunduralım. (3.2.78) sistemi çok basit görünüyor, fakat basit gibi görünen bir problem gerçekte basit olmayabilir. Bunun yaklaşık çözümünü elde etmek için Runge-Kutta metodu kullanılır, Braun [14] $y(t)$ çözümünü $[0,1]$ aralığında sonsuza giderken bulur. Fakat nümerik simülasyon tek bir noktanın olduğu yerde açıkça kanıtlanmaz. Bunun analitik yaklaşımını elde etmek için aşağıdaki homotopiyi kurarız;

$$(1-p)\left(\frac{dv}{dt} - \frac{dy_0}{dt}\right) + p\left(\frac{dv}{dt} - v^2 - t^2\right) = 0 \quad (3.2.79)$$

Her zaman $v_0(t) = y_0(t)$ olarak alabiliriz. Sırayla yakınsak hıza ulaşmak için özel bir yaklaşık çözümü seçmeye ihtiyaç vardır. $y_0(t)$ başlangıç değeri optimal olarak nasıl seçilir? $0 \leq t \leq 1$ aralığı için gözlemlersek $y(t)$,

$$\frac{dy}{dt} - y^2 = 0 \quad y(0) = 1 \quad (3.2.81)$$

başlangıç değer probleminin

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{1-t} \quad (3.2.80)$$

çözümünden daha az değildir. Buna ek olarak $y(t)$,

$$\frac{dy}{dt} - y^2 - 1 = 0, \quad y(0) = 1 \quad (3.2.83)$$

başlangıç değer probleminin

$$\varphi_2(t) = \tan\left(1 + \frac{1}{4}\pi\right) \quad (3.2.82)$$

çözümünü geçmez. $0 \leq t \leq 1$ aralığından dolayı,

$$\frac{1}{1-t} \leq y(t) \leq \tan\left(1 + \frac{1}{4}\pi\right) \quad (3.2.84)$$

olur. [13] Sırasıyla $t=1$ ve $t=\pi/4$ olduğunda $Q_1(t)$ ve $Q_2(t)$ sonsuz hale gelir, $\pi/4$ ve 1 aralığında $y(t)$ nin sonsuz değer aldığını görürüz.

Fakat nümerik simülasyonu içeren hiçbir metot yaklaşık tek nokta olarak bulunamaz. Yukarıdaki analizden

$$v_0(t) = y_0(t) = \frac{1}{1-At} \quad (3.2.85)$$

formunda deneme fonksiyonunu yazmak çok doğaldır, burada A bilinmeyen bir sabittir.

(3.2.79) denklemine pertürbasyon tekniğini uygulayarak, v_1 için

$$\frac{dv_1}{dt} + \frac{dv_0}{dt} - v_0^2 - t^2 = 0, \quad v_1(0) = 0 \quad (3.2.86)$$

lineer denklemi elde edilir. (3.2.86)'da (3.2.85)'i yerine konulduğunda

$$\frac{dv_1}{dt} + \frac{A-1}{(1-At)^2} - t^2 = 0, \quad v_1(0)=0 \quad (3.2.87)$$

bulunur. Yukarıdaki lineer denklemi çözersek;

$$v_1 = -\frac{A-1}{A(1-At)} + \frac{1}{3}t^3 + 1 - \frac{1}{A} \quad (3.2.88)$$

elde edilir.

(3.2.88) denkleminin aşağıdaki 1.dereceden yaklaşık çözümünü elde ederiz.

$$y_1 = v_0 + v_1 = \frac{1}{A(1-At)} + \frac{1}{3}t^3 + 1 - \frac{1}{A} \quad (3.2.89)$$

Buradaki sabit A katsayısı çeşitli yollarla elde edilebilir. Bundan dolayı kolakasyon metodu uygulanır. (3.2.78) denkleminde (3.2.89) denklemini yerine yazılırsa

$$R_1(t) = y_1^1 - y_1^2 - t^2 = \frac{1}{(1-At)^2} - \left(\frac{1}{A(1-At)} + \frac{1}{3}t^3 + 1 - \frac{1}{A} \right)^2 \quad (3.2.90)$$

bulunur. Burada $t = \frac{\pi}{4}$ değeri denkleminde yerine konulursa

$$R_1(\pi/4) = 0 \quad (3.2.91)$$

olur. Böylece A sabit sayısı

$$A = 1.03799 \quad (3.2.92)$$

olarak tanımlanır. Bu yüzden aşağıdaki 1.dereceden yaklaşıma ulaşırız

$$y_1(t) = \frac{0.9281}{0.9634-t} + \frac{1}{3}t^3 + 0.03660 \quad (3.2.93)$$

$t=0.9634$ değeri için $y_1(t)$ 'nin sonsuza gittiği gözlemlenir. Mathematica 3.0 yazımından, bunun yüksek dereceden yaklaşımını kolayca elde edebiliriz ve yüksek doğrulukla tek nokta tanımlayabiliriz.

Örnek 7

$$u'' + \omega^2 \sin u = 0 \quad (3.2.94)$$

matematiksel sarkaç denklemini $u(0)=A$ ve $u'(0)=0$ başlangıç koşullarıyla göz önünde bulunduralım.

(5.3.94) denklemini

$$u'' + 0.u + p\omega^2 \sin u = 0, \quad p = 1 \quad (3.2.95)$$

formunda yeniden yazarız ve

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots \quad (3.2.96)$$

$$0 = \omega_0^2 + pc_1 + p^2c_2 + \dots \quad (3.2.97)$$

denklemlerinin olduğunu farz ederiz.

Önceki örnekteki gibi benzer münipülasyondan ve aşağıdaki bağıntıdan

$$\sin u = \sin u_0 + pu_1 \cos u_0 + p^2(2u_2 \cos u_0 - u_1^2 \sin u_0) + \dots \quad (3.2.98)$$

bulunur. Buradan ise

$$u_0'' + \omega_0^2 u_0 = 0, \quad u_0(0) = A, \quad u_0'(0) = 0, \quad (3.2.99)$$

$$u_1'' + \omega_0^2 u_1 + c_1 u_0 + \omega^2 \sin u_0 = 0 \quad (3.2.100)$$

$$u_2'' + \omega_0^2 u_2 + c_1 u_1 + c_2 u_0 + \omega^2 u_1 \cos u_0 = 0 \quad (3.2.101)$$

denklemleri elde edilir.

(3.2.99) denkleminin çözümü $u_0(t) = A \cos \omega_0 t$ değeri yerine konulduğunda elde edilir ve (3.2.100) denkleminde u_0 'ı yerine koyarsak

$$u_1''(t) + \omega_0^2 u_1(t) + c_1 A \cos \omega_0 t + \omega^2 \sin(A \cos \omega_0 t) = 0 \quad (3.2.102)$$

denklemini bulunur. u_1 'deki seküler terim yok edilirse

$$\int_0^t [c_1 A \cos \omega_0 t + \omega^2 \sin(A \cos \omega_0 t)] \cos \omega_0 t dt = 0 \quad (3.2.103)$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \sin(A \cos \omega_0 t) &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m J_{2m+1}(A) \cos((2m+1)\omega_0 t) \\ &= 2J_1(A) \cos \omega_0 t - 2J_3(A) \cos 3\omega_0 t + 2J_5(A) \cos 5\omega_0 t + \dots \end{aligned} \quad (3.2.104)$$

$$\begin{aligned} \text{ve} \quad \cos(A \cos \omega_0 t) &= J_0(A) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(A) \cos(2m\omega_0 t) \\ &= J_0(A) - 2J_2(A) \cos 2\omega_0 t + 2J_4(A) \cos 4\omega_0 t + \dots \end{aligned} \quad (3.2.105)$$

olarak bulunur. Burada J_m birinci dereceden Bessel fonksiyonunun birinci şekli:

$$J_m(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (A/2)^{2k+m}}{k!(k+m)!} \text{ olur. (3.2.103) bağıntısından}$$

$$c_1 A + 2\omega^2 J_1(A) = 0 \quad (3.2.106)$$

denklemini elde ederiz, burada

$$c_1 = -\frac{2\omega^2 J_1(A)}{A} . \quad (3.2.107)$$

Varyasyonel iterasyon metodunu uyguladığımızda, (3.2.102) denkleminin çözümünü

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \int_0^T [c_1 A \cos \omega_0 s + \omega^2 \sin(A \cos \omega_0 s)] \sin \omega_0 (s-t) ds \\ &= -\frac{2\omega^2 J_3(A)}{(3^2-1)\omega_0^2} \cos 3\omega_0 t + \frac{2\omega^2 J_5(A)}{(5^2-1)\omega_0^2} \cos 5\omega_0 + \dots \end{aligned} \quad (3.2.108)$$

elde ettik.

Sadece 1.dereceden yaklaşım için araştırırsak, (3.2.97) bağıntısından

$$c_1 = -\omega_0^2 \quad (3.2.109)$$

bulunur. Böylece matematiksel sarkacın 1.dereceden yaklaşık çözümü

$$u = A \cos \omega_0 t - \frac{2\omega^2 J_3(A)}{(3^2-1)\omega_0^2} (\omega \cos 3\omega_0 t - \cos \omega_0 t) + \frac{2\omega^2 J_5(A)}{(5^2-1)\omega_0^2} (\cos 5\omega_0 t - \cos \omega_0 t) + \quad (3.2.110)$$

biçimindedir. Burada ω_0 , (3.2.107) ve (3.2.109) denklemlerinden:

$$\omega_0 = \omega \sqrt{\frac{2J_1(A)}{A}} \quad (3.2.111)$$

biçiminde tanımlanır. Periyot ise

$$T = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{2J_1(A)/A}} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1 - \frac{1}{8}A^2 + \frac{1}{192}A^4 + \dots}} \quad (3.2.112)$$

formunda yazılabilir. Örneğin doğruluk $A=\pi/2$ iken % 0.86 ya ulaşır. Pratikte onun sıfırıncı yaklaşım çözümü olan $u=ACos\omega t$ 'yi kullanırız. Şimdi problemin 2.dereceden yaklaşık çözümünü araştıralım. (3.2.101) denklemindeki u_0 ve u_1 'i sunarken ve u_2 'deki seküler terimi yok ederken

$$\int_0^T [c_1u_1 + c_2u_0 + \omega^2u_1 \cos u_0] \cos \omega_0 t dt = 0 \quad (3.2.113)$$

denklemine ihtiyaç duyulur, bu

$$c_2A + \omega^2 \left\{ \frac{J_1(A)J_3(A)}{4\omega_0^2} - \frac{J_3(A)J_4(A)}{4\omega_0^2} + \frac{J_4(A)J_5(A)}{12\omega_0^2} - \frac{J_5(A)J_6(A)}{12\omega_0^2} + \dots \right\} = 0 \quad (3.2.114)$$

sonucuna öncülük eder. Eğer 2.dereceden yaklaşım yeterliyse, (3.2.97) denkleminde

$$\omega_0^2 + c_1 + c_2 = 0 \quad (3.2.115)$$

denklemini elde ederiz. (3.2.97), (3.2.107) ve (3.2.115) denklemleri birlikte çözüldüğünde, ω_0 'ın değerini kolayca bulunabiliriz.

Örnek 8

Bu örnekte aşağıdaki süreksiz olan lineer olmayan oskülatörler göz önünde bulundurulur.

$$u'' + \text{sign}(u) = 0 \quad (3.2.116)$$

bu denklem $u(0)=A$, $u'(0)=0$ başlangıç koşulları $\text{Sing}(u) = \begin{cases} 1 & , u > 0 \\ -1 & , u \leq 0 \end{cases}$

işaret farkıyla tanımlanır. Denklemden küçük parametre yoktur, bu yüzden geleneksel pertürbasyon metodları doğrudan uygulanamayabilir.

Bunun aşağıdaki homotopiyi kurarız:

$$u'' + \omega^2 u = p(\omega^2 u - \text{sign}(u)), p \in [0,1] \quad (3.2.117)$$

Önceki örneklerdeki gibi, u_0 ve u_1 değerleri için diferansiyel denklemler

$$u_0'' + \omega^2 u_0 = 0, \quad u_0(0) = A, \quad u_0'(0) = 0 \quad (3.2.118)$$

$$u_1'' + \omega^2 u_1 = \omega^2 u_0 - \text{sign}(u_0), \quad u_1(0) = 0, \quad u_1'(0) = 0 \quad (3.2.119)$$

biçimindedir.

(3.2.118) denkleminin çözümü $u_0(t) = A \cos \omega t$ 'dir. (3.2.119) denkleminde u_0 değerini yerine koyarak, u_1 için bir diferansiyel denklem elde ederiz, u_1 deki seküler terim yok edildiğinde

$$\int_0^T (\omega^2 u_0 - \text{sign}(u_0)) \cos \omega t dt = \int_0^T \cos \omega t [\omega^2 A \cos \omega t - \text{sign}(A \cos \omega t)] dt = 0$$

$$T = 2\pi/\omega \quad (3.2.120)$$

bulunur. $-\pi/2 \leq \omega t \leq \pi/2$ aralığında $|\cos \omega t| = \cos \omega t$ dir ve $\pi/2 \leq \omega t \leq 3\pi/2$ aralığında $|\cos \omega t| = -\cos \omega t$ dir, bu yüzden (3.2.120) denklemini

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\omega^2 A \cos^2 t - \cos t) dt + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\omega^2 A \cos^2 t + \cos t) dt = 0 \quad (3.2.121)$$

formunda yazılır. Yukarıdaki denklemden

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{\pi A}} \quad (3.2.122)$$

değerini kolayca bulabiliriz. Bunun yaklaşık periyodu

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 5.56\sqrt{A} \quad (3.2.123)$$

biçimindedir. Bunun tam periyodu kolayca elde edilebilir, bu periyot

$$T_{ex} = 4\sqrt{2A} = 5.66\sqrt{A} \quad (3.2.124)$$

dır. % 1.76 bağlı hata 1.dereceden yaklaşık çözümün olduğu için iyi bir değerdir.

(3.2.119) denklemini

$$u_1'' + \omega^2 u_1 = \begin{cases} A\omega^2 \cos \omega t - 1, & -\frac{\pi}{2} \leq \omega t \leq \frac{\pi}{2} \\ A\omega^2 \cos \omega t + 1, & \frac{\pi}{2} \leq \omega t \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad (3.2.125)$$

formunda $u_1(0)=0$ ve $u_1'(0) = 0$ başlangıç koşullarıyla yeniden yazarız. (3.2.125)

denkleminin çözümü

$$u_1 = \begin{cases} \frac{1}{2} A \omega t + \sin \omega t + \frac{1}{\omega^2} t - \frac{1}{\omega^3} \cos \omega t, & -\frac{\pi}{2} \leq \omega t \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} A \omega t \sin \omega t - \frac{1}{\omega^2} t + \frac{\pi}{\omega^3} \sin \omega t, & \frac{\pi}{2} \leq \omega t \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad (3.2.126)$$

olur.

$p = 1$ alınırsa 1. dereceden yaklaşımı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u = u_0 + u_1 = \begin{cases} A \cos \omega t + \frac{1}{2} A \omega t \sin \omega t + \frac{1}{\omega^2} t - \frac{1}{\omega^3} \cos \omega t, & -\frac{\pi}{2} \leq \omega t \leq \frac{\pi}{2} \\ A \cos \omega t + \frac{1}{2} A \omega t \sin \omega t - \frac{1}{\omega^2} t + \frac{\pi}{\omega^3} \sin \omega t, & \frac{\pi}{2} \leq \omega t \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad (3.2.127)$$

burada açısal frekans w , (3.2.122) denklemindeki gibi tanımlanır.

Örnek 9

$$u' + u^2 = 1, u(0) = 0 \quad (3.2.128)$$

denklemini göz önünde bulunduralım. Problemin tam çözümü

$$u_{ex} = \frac{1 - e^{-2t}}{1 + e^{-2t}} \quad (3.2.129)$$

şeklindedir.

Bu problem birçok yazar tarafından çeşitli tekniklerle çalışılmıştır. Liu[16] aşağıdaki çözümden elde edilir.

$$u_{Liu} = (1 - e^{-t}) + e^{-t}(e^{-t} + t - 1) \quad (3.2.130)$$

Liao, homotopi analiz metodun [17] uygulaması,

$$u_{Liao} = (1 - e^{-t}) + e^{-t-2e^{-t}} \left\{ 1 + e^{-t} \left[(t-1) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{(k+1)!} \left(1 - \frac{1}{k}\right) (1 - e^{-kt}) \right] \right\} \quad (3.2.131)$$

problemi için bir sonsuz seri çözümünden elde edilir, bu problem uzun çalışmalardan sonra bir kapalı formdaki ifadedir. Ref.[5]de homotopi aşağıdaki formdaki gibi kurulur.

$$(1-p) (v' + \beta v - u_0' - \beta u_0) + p(v' + v^2 - 1) = 0 \quad (3.2.132)$$

$$\text{veya} \quad v' + \beta v - u_0' - \beta u_0 + p(u_0' + v^2 - 1 + \beta u_0 - \beta v) = 0 \quad (3.2.133)$$

burada u_0 deneme fonksiyonu ve β tanımlanacak olan bilinmeyen serbest bir sabittir. v_0 ve v_1 için diferansiyel denklemleri

$$v_0' + \beta v_0 - u_0' - \beta u_0 = 0, \quad v_0(0) = 1 \quad (3.2.134)$$

$$v_1' + \beta v_1 + u_0' + v_0^2 - 1 + \beta u_0 - \beta v_0 = 0, \quad v_1(0) = 0 \quad (3.2.135)$$

şeklindedir. Önce

$$v_0 = u_0 = 1 - \alpha e^{-\beta t} \quad (3.2.136)$$

ile başlayalım, burada α serbest bir parametredir. (3.2.135) denkleminde (3.2.136) denklemini yerine koyduğumuzda

$$v_1' + \beta v_1 + \alpha(\beta - 2)e^{-\beta t} + \alpha^2 e^{-2\beta t} = 0 \quad (3.2.137)$$

denklemini elde edilir.

$e^{-\beta t}$ teriminin yok edilmesi için

$$\beta = 2 \quad (3.2.138)$$

olmalıdır. Böylece (3.2.137) denkleminde

$$v_1 = \frac{\alpha^2}{2}(e^{-4t} - e^{-2t}) \quad (3.2.139)$$

sonucunu elde ederiz. Bunun 1.dereceden yaklaşık çözümü

$$u = v_0 + v_1 = 1 - \alpha e^{-2t} + \frac{\alpha^2}{2}(e^{-4t} - e^{-2t}) \quad (3.2.140)$$

denklemdir. α sabitini tanımlarken, $u'(0) = 1$ başlangıç koşulunu dahil edebiliriz, böylece $u'(0)$, $\alpha = 1$ 'e eşit olur. Sonuç olarak

$$u = (1 - e^{-t}) + \frac{1}{2}(e^{-4t} - e^{-2t}) \quad (3.2.141)$$

denklemini bulunur. Bunun [1,1] Padé yaklaşımının (2.6 daki bölümde incelenmiştir.) üslü ifadesi

$$u = \frac{1 - e^{-t}}{1 + e^{-t}} \quad (3.2.142)$$

biçimindedir.

$$u' + 0 \cdot u - 1 = -pu^2 \quad (3.2.143)$$

formunda bir homotopi kurabiliriz. Eğer (3.2.143) problemine pertürbasyon tekniğini (dosdoğru açılımı) uygularsak, sadece zayıf bir yakınsamayla bir seri çözümü elde edebiliriz:

$$u_{pert}(t) = t - \frac{1}{3}t^3 + \dots \quad (3.2.144)$$

Farzedelim ki (3.2.143) denkleminde 0 ve 1 katsayıları aşağıdaki formlarda ifade edilebilir:

$$0 = b_0 + pb_1 + p^2 b_2 + \dots \quad (3.2.145)$$

$$1 = c_0 + pc_1 + p^2 c_2 + \dots \quad (3.2.146)$$

Basit bir operasyonla aşağıdaki lineer denklemleri elde ederiz:

$$u_0' + b_0 u_0 - c_0 = 0, \quad u_0(0) = 0 \quad (3.2.147)$$

$$u_1' + b_0 u_1 + b_1 u_0 - c_1 + u_0^2 = 0, \quad u_1(0) = 0 \quad (3.2.148)$$

$$u_1' + b_0 u_2 + b_1 u_1 + b_2 u_0 - c_2 + 2u_0 u_1 = 0, \quad u_2(0) = 0 \quad (3.2.149)$$

(3.2.147) denkleminin çözümü

$$u_0 = \frac{c_0}{b_0} (1 - e^{-b_0 t}) \quad (3.2.150)$$

şeklindedir.

(3.2.148) denkleminde u_0 'ı yerine koyarsak, u_1 için aşağıdaki diferansiyel denklemini elde ederiz;

$$u_1' + b_0 u_1 + \frac{c_0 b_1}{b_0} (1 - e^{-b_0 t}) - c_1 + \frac{c_0^2}{b_0^2} (1 - 2e^{-b_0 t} + e^{-2b_0 t}) = 0 \quad (3.2.151)$$

u_1 deki $(t^n e^{-b_0 t}, n \geq 0)$ terimlerinin yok edilmesi

$$\frac{c_0 b_1}{b_0} - c_1 + \frac{c_0^2}{b_0^2} = 0 \quad (3.2.152)$$

veya

$$\frac{c_0 b_1}{b_0} + \frac{2c_0^2}{b_0^2} = 0 \quad (3.2.153)$$

durumlarını ortaya koyar.

Buradan

$$u_1 = \frac{c_0^2}{b_0^3} (e^{-2b_0 t} - e^{-b_0 t}) \quad (3.2.154)$$

denklemini bulunur.

Not: $t^n e^{-b_0 t}$, $n \geq 0$ formundaki terimleri seküler terim olarak adlandırıyoruz.

Eğer 1.yaklaşım yeterli olursa, $b_i = 0$ ($i \geq 2$) ve $c_i = 0$ ($i \geq 2$) değerlerini alıyoruz. (3.2.145), (3.2.146), (3.2.152) ve (3.2.153) bağıntılarından, $b_0 = 2$, $b_1 = -2$, $c_0 = 2$ ve $c_1 = -1$ sabitleri tanımlanır. Bu yüzden (3.2.141) denklemine benzer 1.dereceden yaklaşık çözüm elde edilir. Yüksek dereceden yaklaşımlar kolaylıkla bulunur. (3.2.149) denkleminde elde edilmiş sonuçlar yerine koyulduğunda, u_2 için aşağıdaki diferansiyel denklem bulunur;

$$u_2' + b_0 u_2 + \frac{c_0^2 b_1}{b_0^3} (e^{-2b_0 t} - e^{-b_0 t}) + \frac{c_0 b_2}{b_0} (1 - e^{-b_0 t}) - c_2 + \frac{2c_0^3}{b_0^4} (1 - e^{-b_0 t}) (e^{-2b_0 t} - e^{-b_0 t}) = 0 \quad (3.2.155)$$

Önceki prosedürdeki gibi, aşağıdaki u_2 deki seküler terimleri yok edilmiş bağıntıyı elde ederiz:

$$-\frac{c_0^2 b_1}{b_0^3} + \frac{c_0 b_2}{b_0} - 2 \frac{c_0^3}{b_0^4} = 0 \quad (3.2.156)$$

$$\frac{c_0 b_2}{b_0} - c_2 = 0 \quad (3.2.157)$$

Eğer 3.dereceden yaklaşık çözüme gelmezsek $b_i = 0$ ($i \geq 3$) ve $c_i = 0$ ($i \geq 3$) değerlerini alıyoruz. (3.2.145), (3.2.146), (3.2.152), (3.2.153), (3.2.156) ve (3.2.157) bağıntılarından sabitler tanımlanır. Liao'nun homotopi analitik metoduyla karşılaştırıldığında Liao'nun örneğini [18] göz önünde bulundururuz;

$$u'(t) + 2tu^2(t) = 0, \quad u(0) = 1 \quad (3.2.158)$$

Problem gerçek bir çözüme sahiptir.

$$u_{ex}(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad (3.2.159)$$

Liao aşağıdaki sonsuz seriler çözümünü [18]nü elde eder.

$$u(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} [(-1)^k t^{2k}] \Phi_{m,k}(\zeta) \quad (3.2.160)$$

burada

$$\Phi_{m,n}(h) = \begin{cases} 0, & (n > m) \\ (-h)^n \sum_{k=0}^{m-n} \binom{m}{m-n-k} \binom{n+k-1}{k} h^k, & (1 \leq n \leq m) \\ 1, & (n \leq 0) \end{cases} \text{şeklindedir.}$$

Formül indirgenmiş halde kapalı bir formda olur. Önceki örneklerdeki gibi, (3.2.158) denklemini aşağıdaki formdaki gibi yeniden yazabiliriz.

$$u'(t) + 0 \cdot u(t) + 2ptu^2(t) = 0 \quad (3.2.161)$$

Çözümün ve katsayının sıfır olduğunu farzettığımızda (3.2.96) ve (3.2.97) formlarındaki tanımlanmış benzer formlar oluşur. Paralel manipülasyondan, aşağıdaki lineer denklemi elde ederiz:

$$u_0' + b_0 u_0 = 0, \quad u_0(0) = 1, \quad (3.2.162)$$

$$u_1' + b_0 u_1 + b_1 u_0 + 2tu_0^2 = 0, \quad u_1(0) = 0 \quad (3.2.163)$$

(3.2.162) denkleminin çözümü

$$u_0 = e^{-b_0 t} \quad (3.2.164)$$

biçimindedir. (3.2.163) denkleminde u_0 'ı yerine koyduğumuzda aşağıdaki denklem oluşur.

$$u_1' + b_0 u_1 + b_1 e^{-b_0 t} + 2te^{-2b_0 t} = 0 \quad (3.2.165)$$

Eğer u_1 gerçek çözüm olursa, $u_1 = 0$ olur. Böyle bir durum söz konusu olamayacağından, bu yüzden

$$\int_0^{\infty} e^{-b_0 t} (b_1 e^{b_0 t} + 2te^{-2b_0 t}) dt = 0 \quad (3.2.166)$$

denklemini kurular, böylece

$$\frac{b_1}{2b_0} + \frac{2}{9b_0^2} \Gamma(2) = 0 \quad (3.2.167)$$

sonucuna ulaşır, burada Γ bir gama fonksiyonudur. (3.2.166) denklemi te^{-b_0t} teriminin yok edildiğini belirtebilir, bunun sonucunda u_1 'i

$$u_1(t) = -\frac{b_1}{b_0} (e^{-b_0t} - e^{-2b_0t}) \quad (3.2.168)$$

formunda yaklaşık olarak çözebiliriz, eğer 1.dereceden yaklaşım yeterliyse, sabitlerini

$$b_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad b_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (3.2.169)$$

şeklinde teşhis ederiz. Bunun 1.dereceden yaklaşımını

$$u = u_0 + u_1 = e^{-b_0t} + (e^{-b_0t} - e^{-2b_0t}) \quad (3.2.170)$$

formunda yazabiliriz, burada b_0 , (3.2.169)'dan tanımlanır.

Örnek 10

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{c}{u} = 0 \quad (3.2.171)$$

denklemini göz önünde bulunduralım, burada c verilmiş bir manyetik cisim için sabittir. Başlangıç koşulları $u(0) = A$ ve $u'(0) = 0$ 'dır. (3.2.171) denklemini aşağıdaki formda yeniden yazarız:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{c}{u^2}\right)u = 0 \quad (3.2.172)$$

u 'nun katsayısı daima pozitifdir, bu yüzden (3.2.172) denklemi bir oskülasyon olarak tanımlanır. (3.2.172) denklemini çözecek olursak,

$$u''u^2 + cu = 0 \quad (3.2.173)$$

formunda yeniden yazarız. Aşağıdaki homotopiyi kurarız:

$$0.u'' + cu + pu''u^2 = 0 \quad (3.2.173)$$

u gerçekte terimini 0'la çarparak yeniden buluruz. Farzedelim çözümdeki, c katsayısı, sıfır ve u' nun katsayısı aşağıdaki formlardaki gibi sırasıyla açılır:

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots \quad (3.2.174)$$

$$c = \omega^2 + pa_1 + p^2a_2 + \dots \quad (3.2.175)$$

$$0 = 1 + pb_1 + p^2b_2 + \dots \quad (3.2.176)$$

(3.2.174) ve (3.2.176) formlarını (3.2.173) denkleminde yerine koyduğumuzda aşağıdaki denklem oluşur:

$$\begin{aligned} & \left(1 + pb_1 + \dots\right)\left(u_0'' + pu_1'' + \dots\right) + \left(\omega^2 + pa_1 + \dots\right)\left(u_0 + pu_1 + \dots\right) \\ & + p\left(u_0'' + pu_1'' + \dots\right)\left(u_0 + pu_1 + \dots\right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.2.177)$$

p 'nin aynı kuvvetlerinin toplam terimleri,

$$u_0'' + \omega^2u_0 = 0, \quad (3.2.178)$$

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + b_1 u_0'' + a_1 u_0 + u_0'' u^2 = 0 \quad (3.2.179)$$

denklemleridir.

(3.2.178) denkleminin çözümü $u_0(x) = A \cos \omega x$ 'dir. (3.2.179)'da u_0 'ı basit manipülasyonla yerine koyduğumuzda

$$u_1'' + \omega^2 u_1 - \left(b_1 \omega^2 - a_1 + \frac{3}{4} A^2 \omega^2 \right) A \cos \omega x - \frac{1}{4} A^3 \omega^2 \cos 3\omega x = 0 \quad (3.2.180)$$

denklemini bulunur. Seküler terimlerinin yok edilmesi aşağıdaki denklemini gerektirir:

$$b_1 \omega^2 - a_1 + \frac{3}{4} A^2 \omega^2 = 0 \quad (3.2.181)$$

Eğer 1.dereceden yaklaşık çözüm yeterliyse (3.2.175) ve (3.2.176)'dan

$$c = \omega^2 + a_1 \quad (3.2.182)$$

$$0 = 1 + b_1 \quad (3.2.183)$$

değerleri elde edilir. (3.2.181) ve (3.2.183) birlikte çözüldüğünde

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{3}} c^{1/2} A^{-1} = 1.1547 c^{1/2} A^{-1} \quad (3.2.184)$$

bulunur. Bunun gerçek frekansı [1] aşağıdaki gibidir;

$$\omega_{ex} = \frac{\pi}{A \sqrt{2\pi/c}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} c^{1/2} A^{-1} = 1.2533 c^{1/2} A^{-1} \quad (3.2.185)$$

Burada % 7.8 gibi iyi bir doğruluk oranı vardır. Homotopi kurmaya alternatif yollar mevcuttur. (3.2.171) denklemini aşağıdaki formda yeniden yazarız:

$$1 + \frac{1}{c}u''u = 0 \quad (3.2.186)$$

(3.2.186)'nın her iki tarafını u 'la çarparsak,

$$u'' + \frac{1}{c}u''^2u = 0 \quad (3.2.187)$$

denklemini elde edilir. Aşağıdaki formdaki gibi bir homotopi kurarız;

$$u'' + 0.u + \frac{p}{c}u''^2.u = 0 \quad (3.2.188)$$

Benzer olarak çözümü ve ortadaki terimin katsayısı olan 0 'ı aşağıdaki formlarda açık olarak yazarız:

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots \quad (3.2.189)$$

$$0 = \omega^2 + pa_1 + p^2a_2 + \dots \quad (3.2.190)$$

Sonuç olarak

$$u_0'' + \omega^2u_0 = 0 \quad (3.2.191)$$

$$u_1'' + \omega^2u_1 + a_1u_0 + \frac{1}{c}u_0''^2u_0 = 0 \quad (3.2.192)$$

denklemleri elde edilir. (3.2.191) denkleminin çözümü $u_0(x) = A \cos \omega x$ olup bu değer (3.2.192)'de yerine konulduğunda

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + \left(a_1 + \frac{3}{4c} \omega^4 A^2 \right) A \cos \omega x + \frac{1}{4c} \omega^4 A^3 \cos 3\omega x = 0 \quad (3.2.193)$$

denklemini verir. u_1 'deki seküler terimlerin yok edilmesi

$$a_1 = -\frac{3}{4c} \omega^4 A^2 \quad (3.2.194)$$

'yi gerektirir. Eğer 1.dereceden yaklaşık çözümde bu işi bitirirsek, (3.2.190) denklemi

$$0 = \omega^2 - \frac{3}{4c} \omega^4 A^2 \quad (3.2.195)$$

haline dönüşür, bu (3.2.184) denkleminde elde ettiğimiz sonuçla aynıdır.

3.3. Blasius Denklemi

2 boyutlu yarı sonlu Falkner-Skan denklemi [19] şu şekildedir;

$$f''' + \alpha f f'' + \beta (1 - f'^2) = 0, \quad \eta \in [0, +\infty] \quad (3.3.1)$$

$$f(0) = f'(0) = 0 \text{ ve } f'(+\infty) = 1 \quad (3.3.2)$$

sınır koşullarıyla burada η 'ya bağlı türevi belirtir ve bu $\eta = y\sqrt{U/\nu x}$ şeklindedir ve $f(\eta)$ 'da, Ψ fonksiyonuna bağlı bir ifadedir ve $f(\eta) = \Psi / \sqrt{\nu U_x}$ ile temsil edilir.

U sonsuzdaki hızdır, ν ise kinematik viskozite katsayısıdır, x ve y ise 2 bağımsız koordinattır.

Homotopi pertürbasyon methodunun efektiflik ve uygunluğunu daha iyi açıklamak için, ilk olarak Blasius denklemini göz önünde bulundururuz:

$$f'''(\eta) + \frac{1}{2} f(\eta) f''(\eta) = 0, \quad \eta \in [0, +\infty] \quad (3.3.3)$$

Bu (3.3.2) denklemindeki sınır koşullarıyla aynıdır. Sırasıyla Blasius denkleminin bir pertürbasyon çözümünü elde etmek için (3.3.3) denkleminde sanal bir parametre olan ε 'nu tanımlayabiliriz:

$$f''' + \frac{1}{2} \varepsilon f f'' = 0 \quad (3.3.4)$$

Pertürbasyon tekniğinin geleneksel bir yolu uygulandığında, ve $f''(0) = \sigma$ olduğu farzedildiğinde, aşağıdaki kuvvetler serisinin [19] formunda (3.3.4) denkleminin çözümü elde edilir.

$$f(\eta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^k \frac{A_k \sigma^{k+1}}{(3k+2)!} \eta^{3k+2}, \quad (3.3.5)$$

burada

$$A_k = \begin{cases} 1, & (k=0 \text{ ve } k=1) \\ \sum_{r=0}^{k-1} \binom{3k-1}{3r} A_r A_{k-r-1}, & (k \geq 2) \end{cases} \text{ 'dır.}$$

Bu çözüm (3.3.5) denkleminde sadece küçük η için geçerlidir. Homotopi analiz metodundan, Liao benzer seriler çözümünden elde edilir, bu bütün bölgelerde geçerlidir. Çözüm aşağıdaki gibidir:

$$f(\eta) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^k \frac{A_k \sigma^{k+1}}{(3k+2)!} \eta^{3k+2} \right] \Phi_{m,k}(h), \quad \eta \in [0, +\infty), \quad -2 < h < 0$$

(3.3.6)

burada $f''(0) = \sigma$ dır. A_k üstteki gibi tanımlanmıştır ve $\Phi_{m,n}$,

$$\Phi_{m,n}(h) = \begin{cases} 0, & (n > m) \\ (-h)^n \sum_{k=0}^{m-n} \binom{m}{m-n-k} \binom{n+k-1}{k} h^k, & (1 \leq n \leq m) \\ 1, & (n \leq 0) \end{cases}$$

şekilde tanımlanır.

Matematik metodlarının birçoğu Blasius denklemlerinde başarıyla test edilebilir, lineer olmayan problemlerde kullanılır, bu çok basit görülür, fakat görünen problemler gerçekte basit olmazlar, bu yaklaşık bir analitik çözüm tarafından araştırması çok zor olan bir şeydir. Bu yüzden bu Blasius denklemindeki analitik çözümleri için araştıran bilim adamları ve mühendislerin daima yararlarının olduğu görülür. Aşağıdaki formda bir homotopi kurarız:

$$f''' + bf'' + p \left(\frac{1}{2} f f'' - b f'' \right) = 0$$

(3.3.7)

burada b bilinmeyen bir sabittir.

Farzedelim çözüm p nin bir kuvvet serileri gibi yazılabilir:

$$f = f_0 + pf_1 + p^2 f_2 + \dots$$

(3.3.8)

(3.3.7) denkleminde (3.3.8)'i yerine koyduğumuzda, f_0 ve f_1 için aşağıdaki denklemleri elde ederiz:

$$f_0''' + bf_0'' = 0 \quad (3.3.9)$$

$$f_1''' + bf_1'' + \frac{1}{2}f_0f_0'' - bf_0'' = 0 \quad (3.3.10)$$

$f_0(0) = f_0'(0) = 0$, $f_0'(+\infty) = 1$ ve $f_1(0) = f_1'(0) = f_1'(+\infty) = 0$ sınır koşullarıdır. (3.3.9) denkleminin çözümü

$$f_0(\eta) = \eta - \frac{1}{b}(1 - e^{-b\eta}) \quad (3.3.11)$$

biçimindedir. Şimdi (3.3.10) denkleminde f_0' 'ı yerine koyduğumuzda

$$f_1''' + bf_1'' + \frac{1}{2}(b\eta + e^{-b\eta} - 2b^2 - 1)e^{-b\eta} = 0 \quad (3.3.12)$$

denklemini elde ederiz. (3.3.12)'nin genel çözümü aşağıdaki gibidir:

$$f_1 = \frac{1}{8b^3}e^{-2b\eta} - \frac{1}{4b}\eta^2 e^{-b\eta} + \left(1 - \frac{1}{2b^2}\right)\eta e^{-b\eta} + \left(\frac{2}{b} - \frac{1}{2b^3}\right)e^{-b\eta} + Ce^{-b\eta} + D\eta + E \quad (3.3.13)$$

burada C, D ve E sabitleri aşağıdaki sınır koşullarından tanımlanmıştır:

$$f_1(0) = f_1'(0) = f_1'(+\infty) = 0 :$$

$$\frac{1}{8b^3} + \frac{2}{b} - \frac{1}{2b^3} + C + E = 0 \quad (3.3.14)$$

$$-\frac{1}{4b^2} + \left(1 - \frac{1}{2b^2}\right) - \left(2 - \frac{1}{2b^2}\right) - bC + D = 0 \quad (3.3.15)$$

$$D = 0 \quad (3.3.16)$$

Pertürbasyon methodundaki seküler terimlerin yok edilmesi için, $\eta e^{-b\eta}$ nun katsayısını sıfıra eşitlememiz yani

$$1 - \frac{1}{2b^2} = 0 \quad (3.3.17)$$

denklemini gerekir, sonuca bağlı olarak $b = 0.707$ dir. Eğer 1.dereceden yaklaşık çözüm yeterliyse,

$$f = f_0 + f_1 = \eta - \frac{1}{b}(1 - e^{-b\eta}) + \frac{1}{8b^3}e^{-2b\eta} - \frac{1}{4b}\eta^2 e^{-b\eta} + \left(\frac{2}{b} - \frac{1}{2b^3}\right)e^{-b\eta} + Ce^{-b\eta} + E \quad (3.3.18)$$

denklemini bulunur.

Blasius denkleminin yüksek doğruluktaki bir nümerik çözümü Howarth [20] tarafından ispatlanmıştır, bu kişi başlangıç eğimini $f''_{ex}(0) = 0.332057$ olarak verir. Yaklaşık başlangıç eğimi $f''(0) = 0.25/b = 0.3536$ iken, % 6.5 lik bağlı hata bulunur. Yüksek doğruluktaki çözümü elde etmek için, sabiti p nin serisi şeklinde de açabiliriz.

(3.3.7) denklemini aşağıdaki formdaki gibi yeniden yazarız:

$$f''' + 1.f'' + p\left(\frac{1}{2}ff'' - f''\right) = 0, \quad (3.3.19)$$

orta terimin katsayısını da p nin serisi şeklinde aşağıdaki gibi açarız.

$$1 = b + pb_1 + p^2b_2 + \dots \quad (3.3.20)$$

Bu yüzden aşağıdaki lineer denklemleri elde ederiz:

$$f_0''' + bf_0'' = 0 \quad (3.3.21)$$

$$f_1''' + bf_1'' + \frac{1}{2}f_0f_0'' - (b - b_1)f_0'' = 0 \quad (3.3.22)$$

$$f_2''' + bf_2'' + \frac{1}{2}(f_0f_1'' + f_1f_0'') - (b - b_1)f_1'' + b_2f_0'' = 0 \quad (3.3.23)$$

Bir önceki prosedürdeki gibi f_1 ve f_2 kolayca çözülebilir. f_1 deki $\eta e^{-b\eta}$ nin katsayısını ve f_2 deki $\eta^2 e^{-b\eta}$ nin katsayısını sıfıra eşitleriz. Eğer 2.dereceden yaklaşık çözüm yeterli ise, (3.2.20) denkleminde $b_k = 0$ ($k \geq 2$) değerini alırız. Sonuç olarak b sabitini tanımlarız. ($\alpha = 1$)'de Falkner-Skan göz önünde bulundurulduğunda, aşağıdaki formda bir homotopi kurarız:

$$f''' + bf'' + p(ff'' - bf'' + \beta - \beta f'^2) = 0 \quad (3.3.24)$$

burada b bilinmeyen bir sabittir. f_0 ve f_1 için denklemler

$$f_0''' + bf_0'' = 0 \quad (3.3.25)$$

$$f_1''' + bf_1'' + f_0f_0'' - bf_0'' + \beta - \beta f_0'^2 = 0 \quad (3.3.26)$$

şeklinde olur, sınır koşulları ise aşağıdaki gibidir.

$f_0(0) = f_0'(0) = 0$, $f_0'(+\infty) = 1$ ve $f_1(0) = f_1'(0) = f_1'(+\infty) = 0$. Böylece (3.3.25) denkleminin çözümü $f_0(\eta) = \eta - (1 - e^{-b\eta})/b$ dur. (3.3.26) denkleminde f_0 'ı yerine koyduğumuzda, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$f_1''' + bf_1'' + (b\eta + e^{-b\eta} - b^2 - 1)e^{-b\eta} + \beta - \beta(1 - e^{-b\eta})^2 = 0 \quad (3.3.27)$$

(3.3.27) denkleminin çözümü

$$f_1 = \frac{1-\beta}{4b^3}e^{-2b\eta} - \frac{1}{2b}\eta^2 e^{-b\eta} + \left(1 - \frac{2\beta}{b^2} - \frac{1}{b^2}\right)\eta e^{-b\eta} + \left(\frac{2}{b} - \frac{1+\beta}{b^3}\right)e^{-b\eta} + Ce^{-b\eta} + D\eta + E \quad (3.3.28)$$

biçimindedir. Burada C, D ve E sabitleri $f_1(0) = f_1'(0) = f_1'(+\infty) = 0$ sınır koşullarıyla tanımlanır.

$$C = -b^3 - \frac{1}{2}b(1 - 5\beta), \quad D = 0, \quad E = -\frac{1-\beta}{4b^3} - \left(\frac{2}{b} - \frac{1+\beta}{b^3}\right) - C \quad (3.3.29)$$

ifade $\eta e^{-b\eta}$ katsayılarına göre düzenlenip bu katsayılar 0'a eşitlenirse

$$1 - \frac{2\beta}{b^2} - \frac{1}{b^2} = 0 \quad (3.3.30)$$

$$\text{bulunur. Sonuçta } b = \sqrt{1 + 2\beta} \quad (3.3.31)$$

elde edilir.

1.dereceden yaklaşık çözüm

$$f = f_0 + f_1 = \eta - \frac{1}{b}(1 - e^{-b\eta}) + \frac{1-\beta}{4b^3}e^{-2b\eta} - \frac{1}{2b}\eta^2 e^{-b\eta} + \left(\frac{2}{b} - \frac{1+\beta}{b^3}\right)e^{-b\eta} + Ce^{-b\eta} + E \quad (3.3.32)$$

şeklindedir. 1.mertebeden türevi ise aşağıdaki gibidir.

$$f' = 1 - e^{-b\eta} - \frac{1-\beta}{2b^2} e^{-2b\eta} - \frac{1}{b} \eta e^{-b\eta} + \frac{1}{2} \eta^2 e^{-b\eta} - \left(2 - \frac{1+\beta}{b^2}\right) e^{-b\eta} - bC e^{-b\eta} \quad (3.3.33)$$

bu üstel olarak 1'e yakınsar. Hartree [21] ve Stewartson [22] tarafından ispat edildiği gibi, Falkner-Skan denklemi ($\alpha = 1$), $0 \leq \beta \leq 2$ aralığında tek bir çözümü vardır. Bunun da 1.mertebe türevi üstel olarak 1'e yakınsar. $f''(0)$ için analitik formülasyonu aşağıdaki gibidir.

$$f''(0) = \frac{3\beta + 1}{2b} = \frac{1 + 3\beta}{2\sqrt{1 + 2\beta}} \quad (3.3.34)$$

Çizelge 3.3.1de Falkner-Skan için $f''(0)$ ın analitik yaklaşımlarının karşılaştırılması aşağıda sayısal sonuçlarla verilmiştir.

Çizelge 3.1.1.

β	White'in Nümerik Sonuçları [23]	(3.3.34) Denk. için 1. Mertebe Çözüm	Bağlı Hata
2	1.6872	1.5652	%7.2
1.6	1.5215	1.4151	%7.0
1.2	1.3357	1.2474	%6.6
1.0	1.2326	1.1547	%6.3
0.8	1.1203	1.0543	%5.9
0.6	0.9958	0.9439	%5.2
0.5	0.9277	0.8839	%4.7
0.4	0.8544	0.8199	%4.0
0.3	0.7748	0.7510	%3.1
0.2	0.6867	0.6761	%1.5
0.1	0.5870	0.5934	%1.1
0	0.4696	0.5000	%6.5

3.4.Homotopi Perturbasyon Metodu ve Varyasyonel Metodun Çift Metodu

Bu bölümde yüksek dereceden yaklaşık çözümleri bulmak için varyasyonel yaklaşımları tanıtacağız. Bir klasik örnek gibi, iyi bilinen Duffing denklemini göz önünde bulunduralım.

$$u'' + u + \varepsilon u^3 = 0, \quad u(0) = A, \quad u'(0) = 0 \quad (3.4.1)$$

Aşağıdaki homotopiyi kurarız.

$$u'' + \omega^2 u + p[(1 - \omega^2)u + \varepsilon u^3] = 0 \quad (3.4.2)$$

Benzer olarak

$$u_0'' + \omega^2 u_0 = 0, \quad u_0(0) = A, \quad u_0'(0) = 0 \quad (3.4.3)$$

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + (1 - \omega^2)u_0 + \varepsilon u_0^3 = 0, \quad u_1(0) = 0, \quad u_1'(0) = 0 \quad (3.4.4)$$

denklemlerini elde ederiz. (3.4.3) denkleminin çözümü $u_0 = A \cos \omega t$ olup, burada ω , u_1 için varyasyonel formülasyonundan tanımlanabilir, bu

$$J(u_1) = \int_0^T \left\{ -\frac{1}{2} u_1'^2 + \frac{1}{2} \omega^2 u_1^2 + (1 - \omega^2) u_0 u_1 + \varepsilon u_0^3 u_1 \right\} dt, \quad T = 2\pi/\omega \quad (3.4.5)$$

şeklinde okunur. Daha iyi tanımlanmış prosedürde, çok basit deneme fonksiyonu seçeriz:

$$u_1 = B(\cos \omega t - \cos 3\omega t) \quad (3.4.6)$$

(3.4.5) fonksiyoneliinde u_1 yerine koyulduğunda

$$J(B, \omega) = \frac{2\pi}{\omega} \left(-2B^2 \omega^2 - \frac{1}{2} AB(\omega^2 - 1) + \frac{1}{4} \varepsilon A^3 B \right) \quad (3.4.7)$$

sonucu elde edilir.

$$\frac{\partial J}{\partial B} = 0, \quad \text{ve} \quad \frac{\partial J}{\partial \omega} = 0 \quad (3.4.8)$$

değerlerinden ise

$$B = 0 \quad \text{ve} \quad \omega = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \varepsilon A^2} \quad (3.4.9)$$

Bulunur. Böylece 1.dereceden yaklaşık çözüm

$$u = A \cos\left(\sqrt{1 + \frac{1}{2} \varepsilon A^2} t\right) \quad (3.4.10)$$

şeklinde elde edilir.

Yaklaşık periyot aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + 0.5\varepsilon A^2}} \quad (3.4.11)$$

Küçük ε için, bizim sonucumuzun doğruluğu pertürbasyon teorisi tarafından elde edilenden bağıl hatadan daha düşüktür. Fakat bu daha önceki varyasyonel yaklaşımdan elde edildi, burada bu bütün çözüm tanımları için geçerlidir, örneğin $0 < \varepsilon < \infty$. Eğer $\varepsilon \rightarrow \infty$ giderse aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{T_{ex}}{T} = \frac{2\sqrt{0.5}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - 0.5 \sin^2 x}} = \frac{2\sqrt{0.5}}{\pi} x 1.68575 = 1.19 \quad (3.4.12)$$

$\varepsilon \rightarrow \infty$ 'a giderken % 16 lık bağıl hata, (3.4.6) denklemi için kullanılan basit deneme fonksiyonuna göre gerçekten de iyi bir yaklaşım elde ettiğimizi gösterir.

1.dereceden yaklaşık çözümün doğruluğu eğer aşağıdaki deneme fonksiyonunu seçersek daha da gelişir:

$$u_1 = B_1 \cos \omega t + B_3 \cos 3 \omega t + (1 - B_1 - B_3) \cos 5 \omega t \quad (3.4.13)$$

olur. (3.4.5)'te (3.4.13)'ü yerine yazılırsa aşağıdaki sonuca ulaşırız:

$$J(B_1, B_3, \omega) = \frac{2\pi}{\omega} \left\{ -2B_3^2 \omega^2 - 6(1 - B_1 - B_3)^2 \omega^2 + \frac{1}{2} AB_1 (1 - \omega^2) + \frac{3}{8} \varepsilon A^3 B_1 + \frac{1}{8} \varepsilon A^3 B_3 \right\} \quad (3.4.14)$$

(3.4.14)'ün durgun olma şartı

$$\frac{\partial J}{\partial B_1} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial B_3} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial J}{\partial \omega} = 0 \quad (3.4.15)$$

durumlarını gerektirir. Bu durumda:

$$12(1 - B_1 - B_3) \omega^2 + \frac{1}{2} A(1 - \omega^2) + \frac{3}{8} \varepsilon A^3 = 0 \quad (3.4.16)$$

$$-4B_3 \omega^2 + 12(1 - B_1 - B_3) \omega^2 + \frac{1}{8} \varepsilon A^3 = 0 \quad (3.4.17)$$

$$-2B_3^2 \omega^2 - 6(-B_1 - B_3)^2 \omega^2 - \frac{1}{2} AB_1 (1 + \omega^2) - \frac{3}{8} \varepsilon A^3 B_1 - \frac{1}{8} \varepsilon A^3 B_3 = 0 \quad (3.4.18)$$

denklemleri bulunur.

Hesaplamalar, bilgisayarda Maple veya Reduce gibi sembolik hesaplamaların yardımıyla elde edilir ve burada kapalı olmayan ifadeler yazılmamıştır. Varyasyonel yaklaşım deneme fonksiyonunun serbest bir seçimiyle bizim daha iyi çözüm elde etmemizi sağlar ve bize frekans ve genlik arasındaki bağıntıların bilgisini verir. Aşağıdaki sınır değer problemini göz önünde bulunduralım:

$$u'' - u + 2u^3 = 0, \quad u(0) = 1, \quad u(\infty) = 0 \quad (3.4.19)$$

Denklemden kapalı olmayan veya aşık küçük parametreler yoktur. Aşağıdaki homotopiyi kurarız

$$u'' - \omega^2 u + p[(\omega^2 - 1)u + 2u^3] = 0 \quad (3.4.20)$$

(3.2.20) denkleminin çözümünü, (3.2.11) denklemindeki gibi p nin kuvvet serilerinin formunda bulmaya çalışacağız. Sadece u_0 ve u_1 için denklemler yazılırsa:

$$u_0'' - \omega u_0 = 0, \quad u_0(0) = 1, \quad u_0(\infty) = 0 \quad (3.4.21)$$

$$u_1'' - \omega^2 u_1 + (\omega^2 - 1)u_0 + 2u_0^3 = 0 \quad u_1(0) = 0, \quad u_1(\infty) = 0 \quad (3.4.22)$$

bulunur.

Eğer u_0 gerçek çözüm olursa, u_1 tamamen yok olur. Homotopi pertürbasyon metodunda, u_0 (3.4.19) denkleminin yaklaşık bir çözümüdür, bu bütün çözümlerin tanım kümesi için geçerlidir, bu yüzden $(\omega^2 - 1)u_0 + 2u_0^3$ daha küçük terime ulaşır. ω sabitini tanımlamak için, ifadeyi minimize edelim:

$$\int_0^\infty \{(\omega^2 - 1)u_0 + 2u_0^3\}^2 dt \rightarrow \min . \quad (3.4.23)$$

Burada varyasyonel yaklaşım kullanırız.

$$J(u_1) = \int_0^\infty \left\{ -\frac{1}{2}u_i^2 - \frac{1}{2}\omega^2 u_1^2 + (\omega^2 - 1)u_1 u_0 + 2u_0^3 u_1 \right\} dt \quad (3.4.24)$$

Yukarıda u_1 ihmal edilecek kadar küçük bir değerdir. Bu yüzden aşağıdaki formda deneme fonksiyonu seçeriz.

$$u_1 == B(e^{-\omega t} - e^{-3ax}) \quad (3.4.25)$$

Burada B küçük değerli bir sabittir. Daha fazla genelleştirmek için, u_1 aşağıdaki formda ifade edilebilir.

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} e^{-(2n+1)\omega t} \quad (3.4.26)$$

Burada B_{2n+1} 'ler bilinmeyen sabitlerdir. Sınır koşullarının $u_1(0) = 0$ ve $u_1(\infty) = 0$ olmasından dolayı, bir sonraki bağıntıyı elde ederiz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} = 0 \quad (3.4.27)$$

(3.4.26)'yı (3.4.24)'de yerine koyarak ω 'nin ve B_{2n+1} 'nin fonksiyonlarını elde ederiz. Bu fonksiyon aşağıdaki gibidir.

$$J(\omega, B_{2n+1}) = 0 \quad (3.4.28)$$

Çözüm prosedürü çok basittir ve bazı matematiksel yazılımlarla tamamlanır. En sonunda 1. derece çözümü $p = 1$ 'i kurarak elde ederiz.

$$u = u_0 + u_1 = e^{-\omega t} + \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} e^{-(2n+1)\omega t} \quad (3.4.29)$$

yazılır.

Vibro-etkili yönteminin modelleme örneğini inceleyelim.

$$u'' + \varepsilon u^n = 0, \quad n=3,5,7 \dots \infty \quad (3.4.30)$$

Burada sınır koşulları $u(0) = 0$ ve $u'(0)=1$ olur. Burada homotopi oluşturulacak olursa:

$$u'' + \omega^2 u = p(\omega^2 v - \varepsilon v^n) \quad (3.4.31)$$

Benzer manipulyasyonla, aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\omega = \sqrt{\frac{\varepsilon(n+1)!}{2^n \left(\frac{1}{2}(n+1)\right)! \left(\frac{1}{2}(n+1)\right)!}}, \quad (3.4.32)$$

Bu bütün $\varepsilon > 0$ 'lar için geçerlidir.

3.5. Thomas-Fermi Denklemleri

Matematiksel fizikte önemli göreve sahip olan, Thomas Fermi denklemlerini göz önünde bulunduralım. [24,25,26]

$$u''(x) = x^{-1/2} u^{3/2}, \quad u(0) = 1, \quad u(\infty) = 0 \quad (3.5.1)$$

Bu problem ağır atomlardaki etkili çekirdek yükünün modelini kurmak için geliştirilmiştir.

Atom numarası z 'nin nötr atomu için olan enerji (atomik birimlerdeki enerji) aşağıdaki gibidir:

$$E = \frac{6}{7} \left(\frac{4}{3\pi} \right)^{2/3} z^{7/3} u'(0)$$

Bu yüzden $u'(0)$ 'ın potansiyelinin başlangıç eğimi için yüksek doğruluk değeri açıklamak önemlidir.

Bu problemin varyasyonel yaklaşım ispatı [27]'de verilmektedir:

$$J(u) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} u'^2 + \frac{2}{5} x^{-1/2} u^{5/2} \right) dx \quad (3.5.2)$$

$u = e^{-\beta x} (1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)$ formunda deneme fonksiyonunu seçebiliriz. Burada c_i 'ler, daha sonra Ritz methoduyla hesaplanacak olan bilinmeyen sabitlerdir. 1.mertebe yaklaşım, başlangıç eğiminin [27], % 7.8 doğruluğuyla sonuçlanır.

f metodu [24], Thomas-Fermi denklemlerini çözmek için gösterildi. f metodunun temel fikri, Thomas-Fermi denkleminin sağ tarafını, f parametresini içeren bir tanesiyle değiştirmektir. Yani

$$u''(x) = u^{1+\delta} x^{-\delta} \quad (3.5.3)$$

Çözümün, δ 'ya göre kuvvet serisine açılmış olacağı varsayılır.

$$u = u_0 + \delta u_1 + \delta^2 u_2 + \dots \quad (3.5.4)$$

Bu, sırayla u_n için lineer denklemlerin bir kümesini oluşturur:

$$u_0'' - u_0 = 0$$

$$u_1'' - u_1 = u_0 \ln(u_0 / x)$$

$$u_2'' - u_2 = u_1 + u_1 \ln(u_0 / x) + \frac{1}{2} u_0 \ln^2(u_0 / x)$$

...

Bu denklemlerin bağlantılı sınır koşulları; $u_0(0) = 1$, $u_0(\infty) = 0$ ve $u_n(0) = u_n(\infty) = 0$, $n > 1$ için olur.

$n > 1$ 'de u_n 'i çözmek için, bazı benzer olmayan fonksiyonlara, ihtiyaç duyarız. Bu yüzden, bu methodu ilerletmede bazı zorluklarla karşılaşabiliriz.

Ref[28]'deki parametre ile probleme diğer bir yaklaşım öneririz. Bu durum Bölüm 5.2'de de görülebilir. Bundan dolayı, problemi çözmek için homotopi pertürbasyon metoduna başvururuz.

$$u''(x) - 0.u = p.x^{-1/2}.u^{3/2} \quad (3.5.5)$$

çözümün ve 0 katsayısının aşağıdaki formlarda ifade edilmiş olabileceğini varsayalım.

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots \quad (3.5.6)$$

$$0 = \beta^2 + pa_1 + p^2a_2 + \dots \quad (3.5.7)$$

Basit bir işlemle, aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$u_0'' - \beta^2 u_0 = 0 \quad (3.5.8)$$

$$u_1''(x) - \beta^2 u_1 = x^{-1/2} u_0^{3/2} + a_1 u_0 \quad (3.5.9)$$

$$u_2''(x) - \beta^2 u_2 = \frac{3}{2} x^{-1/2} u_0^{1/2} u_1 + a_2 u_0 + a_1 u_1 \quad (3.5.10)$$

Bu denklemlerin birleştirilmiş sınır koşulları; $u_0(0) = 1$, $u_0(\infty) = 0$ ve $u_n(0) = u_n(\infty) = 0$, $n > 1$ için olur.

Denklem (3.5.8)'in çözümü $u_0 = e^{-\beta x}$ dir. u_0 'ı (3.5.9) denkleminde yerine koyarak aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$u_1''(x) - \beta^2 u_1 = x^{-1/2} e^{-3/2\beta x} + a_1 e^{-\beta x} \quad (3.5.11)$$

Önceki örnekler gibi, aşağıdaki denklemi,

$$\int_0^{\infty} \left(x^{-1/2} e^{-3/2\beta x} + a_1 e^{-\beta x} \right) e^{-\beta x} dx = 0 \quad (3.5.12)$$

ya da
$$\sqrt{\frac{2}{5\beta}} \Gamma(1/2) + \frac{a_1}{2\beta} = 0 \quad (3.5.13)$$

denklemlerini oluştururuz.

Eğer 1.mertebeden yaklaşım yeterli ise, daha sonra (3.5.7) ve (3.5.13)'ten aşağıdaki denklemi elde edilir.

$$\beta = \left(\frac{8\pi}{5} \right)^{1/3} = 1.713 \quad (3.5.14)$$

O mertebe yaklaşık çözüm aşağıdaki gibi olur.

$$\tilde{u}_0 = e^{-1.713x} \quad (3.5.15)$$

Thomas-Fermi denkleminin bir yüksek doğrulukta sayısal çözümü, başlangıç eğimini [26] veren Kobayashi et. al. tarafından sağlanmıştır.

$$u'_{\text{exac}}(0) = -1.5880710 \quad (3.5.16)$$

Çözümünün $\tilde{u}_0(0) = 1.713$ 'ü gösterdiğinde, % 7.8 doğruluk çok iyidir.

[24]'te belirtilmiş olan u_I 'i çözmek için mertebe indirgeme methodunu kullanabiliriz. Bundan dolayı U_I 'in yaklaşık çözümünü araştırmak için

varyasyonel metodu kullanıyoruz. (3.5.9) ve (3.5.10) için varyasyonel formülleme; aşağıdaki şekilde olur.

$$J_1(u_1) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} u_1'^2 + \frac{1}{2} \beta^2 u_1^2 + \left(x^{-1/2} e^{-\frac{3}{2}\beta x} - \beta^2 e^{-\beta x} \right) u_1 \right\} dx \quad (3.5.17)$$

$$J_2(u_2) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} u_2'^2 + \frac{1}{2} \beta^2 u_2^2 + \left(\frac{3}{2} x^{-1/2} u_0^{1/2} u_1 + a_2 u_0 + a_1 u_1 \right) u_2 \right\} dx \quad (3.5.18)$$

En basit formda deneme fonksiyonu

$$u_1 = \lambda_1 (e^{-\beta x} - e^{-2\beta x}) \quad (3.5.19)$$

$$u_2 = \lambda_2 (e^{-\beta x} - e^{-2\beta x}) \quad (3.5.20)$$

biçiminde ifade ederiz.

(3.5.19)'u (3.5.17)'de yerine koyarak $\partial J_1 / \partial d_1 = 0$ 'i oluşturarak bilinmeyen sabit d_1 'i belirleyebiliriz. Benzer şekilde bilinmeyen sabit d_2 , daha sonra hesaplanacak olan $\partial J_2 / \partial d_2 = 0$ 'dan bulunur.

3.6. Bifurkasyon

Bu bölümde, Lineer olmayan denklemlerin bir çeşidi, Bifurkasyon eğrileri için, araştırma yapmada homotopi pertürbasyon metoduna başvuracağı uzaydaki, Duffing oskülatörlerini inceleyelim.

$$u'' + \varepsilon (u - A^2 u^3) = 0, \quad u(0) = u(\pi) = 0, \quad u(\pi/2) = 1, \quad \varepsilon \geq 0 \quad (3.6.1)$$

Herhangi bir $\varepsilon \geq 0$ için, yukarıdaki denklem $u(t) = 0$ aşıkâr çözüme sahiptir. ε 'nın bazı değerleri için bir aşıkâr olmayan çözüm var olduğunda, iyi bilinen basit bifurkasyon meydana gelir.

Geleneksel pertürbasyon metodu aşağıdaki denklemi tanımlamıştır.

$$A = \pm 2\sqrt{\frac{\varepsilon - 1}{3}}, \quad \varepsilon \geq 1 \quad (3.6.2)$$

Bu denklem sadece ε 'nin çok küçük değerleri için geçerlidir.

Homotopi pertürbasyona göre, bir sonraki basit homotopiyi kurarız:

$$u'' + \varepsilon u - \varepsilon p A^2 u^3 = 0 \quad (3.6.3)$$

Çözümün ve u 'nin katsayısı ε 'nin p 'ye göre kuvvet serilerine açılabileceğini varsayalım.

$$u = u_0 + p u_1 + p^2 u^2 + \dots \quad (3.6.4)$$

$$\varepsilon = \omega^2 + p \omega_1 + p^2 \omega_2 + \dots \quad (3.6.5)$$

(3.6.4) ve (3.6.5)'i (3.6.3)'de yerine koyarak ve p 'nin kuvveti olan terimleri eşitlenerek, lineer denklemlerin bir serilerini elde edebiliriz ve sadece ilk iki lineer denklemi yazarız:

$$u_0'' + \omega^2 u_0 = 0 \quad u_0(0) = (u_0/\pi) = 0, \quad u_0(\pi/2) = 1 \quad (3.6.6)$$

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + \omega_1 u_0 - \varepsilon A^2 u_0^3 = 0, \quad u_1(0) = u_1(\pi) = 0, \quad u_1(\pi/2) = 0 \quad (3.6.7)$$

Denklem (3.6.6)'nın genel çözümü; a ve b 'nin sabit olduğu

$$u_0(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t \quad (3.6.8)$$

dir.

$u_0(0) = u_0(\pi) = 0$ sınır koşullarına ve ek koşul $u_0(\pi/2) = I$ 'e ek olarak, $a = 1$, $b = 0$ ve $\omega = 1$ 'i elde ederiz. Bu yüzden u_0 'ın çözümü:

$$u_0 = \sin t \quad (3.6.9)$$

biçimindedir.

u_0 'ı denklem (3.6.7)'de yerine koyarak, u_1 için bir diferansiyel denklem elde ederiz.

$$u_1'' + u_1 + \omega_1 \sin t - \varepsilon A^2 \sin^3 t = 0 \quad (3.6.10)$$

ya da

$$u_1'' + u_1 + \left(\omega_1 - \frac{3}{4} \varepsilon A^2 \right) \sin t - \frac{1}{4} \varepsilon A^2 \sin 3t = 0 \quad (3.6.11)$$

u_1 'de seküler terimi yok etme, aşağıdaki denkleme gerektirir.

$$\omega_1 = \frac{3}{4} \varepsilon A^2 \quad (3.6.12)$$

Sınır koşulları $u_1(0) = u_1(\pi) = 0$ ve ek koşul $u_1(\pi/2) = 0$ 'ı göz önünde bulundurduğumuzda, (3.6.11)'in çözümü aşağıdaki gibi olur.

$$u_1 = -\frac{1}{32} \varepsilon A^2 (\sin 3t + \sin t) \quad (3.6.13)$$

Bu yüzden, aşağıdaki 1.derece yaklaşık çözümleri elde ederiz.

$$u = u_0 + u_1 = \sin t - \frac{1}{32} \varepsilon A^2 (\sin 3t + \sin t) \quad (3.6.14)$$

ve
$$\varepsilon = 1 + \frac{3}{4} \varepsilon A^2 \quad (3.6.15)$$

$\varepsilon \geq 0$ olduğu için yukarıdaki denklemin $\varepsilon < 1$ olduğunda çözümü yoktur. Bununla birlikte $\varepsilon > 1$ olduğunda denklem (3.6.15) aşağıdaki çözüme sahiptir.

$$A = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon}} \quad (3.6.16)$$

Bu yüzden, iyi bilinen basit bifurkasyon $\varepsilon = 1$ 'de meydana gelir. Burada bulunan çözüm Liao[29] tarafından bulunan sonuçla aynıdır. Bu teknolojiye, gelecek bölümde göreceğimiz, bazı lineer olmayan dalga denklemlerinin bifurkasyonlarını araştırmak için başvuracağız.

3.7.Dalga Denklemleri

Bu bölümde, lineer olmayan dalga denklemleri için homotopi pertürbasyon methoduna nasıl başvuracağımızı göstermek için bazı örnekler vereceğiz. Drinfeld-Sokolow-Wilson çiftinin dalga denklemini [31,32] göz önünde bulunduralım:

$$u_t + 3v.v_x = 0 \quad (3.7.1)$$

$$u_t + 2v_{xxx} + 2u.v_x + u_x.v = 0 \quad (3.7.2)$$

Bunun hareketli dalga çözümünü, aşağıdaki formda ifade ederiz.

$$u(x,t) = U(\xi), \quad v(x,t) = v(\xi), \quad \xi = kx + ct \quad (3.7.3)$$

(3.7.3)'ü (3.7.1) ve (3.7.2)'de yerine koyduğumuzda aşağıdaki gibi sonuç alırız.

$$cu + \frac{3}{2}kv^2 = 0 \quad (3.7.4)$$

$$cv' + 2k^3v''' + 2kuv' + ku'v = 0 \quad (3.7.5)$$

Burada üs, ε yönlü diferansiyeli gösterir.

(3.7.4) ve (3.7.5)'den, kolayca v için diferansiyel denklem bulabiliriz:

$$v'' + \frac{c}{2k^3}v - \frac{1}{ck}v^3 = 0 \quad (3.7.6)$$

Denklem (3.7.6) için homotopi pertürbasyon methoduna başvurur ve

$$v'' + \frac{c}{2k^3}v - \frac{1}{ck}pv^3 = 0 \quad p \in [0,1] \quad (3.7.7)$$

formunda bir homotopi kurarız.

Denklem (3.7.7)'nin çözümünün, p 'nin bir serisi ile ifade edilebileceğini varsayarız.

$$v_0 = v_0 + p \cdot v_1 + p^2 v_2 + \dots \quad (3.7.8)$$

Ayrıca, lineer terimlerin katsayısı p 'nin serilerine aşağıdaki gibi açılabilir.

$$\frac{c}{2k^3} = \omega^2 + p\omega_1 + p^2\omega_2 + \dots \quad (3.7.9)$$

(3.7.8) ve (3.7.9) denklemlerini, (3.7.7)'de yerine koymak ve p'nin benzer kuvvetlerinin katsayılarını eşitlemek lineer denklemlerin serisini verir:

$$v_0'' + \omega^2 v_0 = 0 \quad (3.7.10)$$

$$v_1'' + \omega^2 v_1 + \omega_1 v_0 - \frac{1}{ck} v_0^3 = 0 \quad (3.7.11)$$

(3.7.10) denklemini çözerek, aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$v_0 = A \cos \omega \varepsilon \quad (3.7.12)$$

(3.7.12)'yi (3.7.11)'de yerine koyma, aşağıdaki gibi sonuçlanır.

$$v_1'' + \omega^2 v_1 + \left(\omega_1 - \frac{3A^2}{4ck} \right) A \cos \omega \xi - \frac{A^3}{4ck} \cos 3\omega \xi = 0 \quad (3.7.13)$$

Burada $\omega_1 - \frac{3A^2}{4ck} = 0$ olmadığı takdirde, (3.7.13)'ün tüm çözümlerinin bir seküler terimi içerdiğine dikkat edilmelidir.

Böylece;

$$\omega_1 = \frac{3A^2}{4ck} \quad (3.7.14)$$

'e gerek duyarız ve (3.7.13) denklemlerinden $\cos \omega \xi$ teriminin hepsini birlikte ekleriz.

Bu nedenle, (3.7.13) denklemini aşağıdaki hale gelir.

$$v_1'' + \omega^2 v_1 - \frac{A^3}{4ck} \cos 3\omega\xi = 0 \quad (3.7.15)$$

(3.7.14) ün çözümü aşağıdaki gibi olur.

$$v_1 = -\frac{A^3}{32ck\omega^2} (\cos 3\omega\xi - \cos \omega\xi) \quad (3.7.16)$$

Eğer 1.mertebe yaklaşık çözüm yeterli ise, (3.7.8) ve (3.7.9)'da $p = 1$ yazarak,

$$v = v_0 + v_1 = A \cos \omega\xi - \frac{A^3}{32ck\omega^2} (\cos 3\omega\xi - \cos \omega\xi) \quad (3.7.17)$$

$$\text{ve} \quad \frac{c}{2k^2} = \omega^2 + \frac{3A^2}{4ck} \quad (3.7.18)$$

denklemlerini elde ederiz.

Aşağıdaki formda (3.7.17)'yi yeniden yazalım.

$$\omega^2 = \frac{c}{2k^3} - \frac{3A^2}{4ck} \quad (3.7.19)$$

$\omega \geq 0$ olduğundan, yukarıdaki denklemin $c < 1.22kA$ 'da çözümü yoktur. Bununla birlikte $c > 1.22kA$ olduğunda (3.7.19)'un çözümü aşağıdaki gibi olur.

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{2k^3} - \frac{3A^2}{4ck}} \quad (3.7.20)$$

Bu yüzden iyi bilinen bifürkasyon $c = 1.22kA$ 'da oluşur. Şimdi (3.7.6) için bir varyasyonel ilkeyi hesaplarız. [Varyasyonel ilkeler, problemin çözümünün doğasında fiziksel görünüş sağlarlar.]

Yarı-ters metoduyla, aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$J(v) = \int \left\{ -\frac{1}{2}v'^2 + \frac{c}{4k^3}v^2 - \frac{1}{4ck}v^4 \right\} d\xi \quad (3.7.21)$$

Eğer (3.7.6) için periyot çözüm araştırmak istersek sonra (3.7.21) enerji integralinden $\forall \xi > 0$ için, $\frac{c}{4k^3}v^2 - \frac{1}{4ck}v^4$ potansiyelinin pozitif olmasını gerektirir. Bu yüzden A' , askülötörün argümanı olduğu orijin çevresinde bir askülötör sadece $c > kA$ ise meydana gelir.

Yukarıda belirtilmiş olan homotopi pertürbasyonu methoduyla bulunan sonucu çok yakın olan bifurkasyon $c = kA$ iken meydana gelir. Şimdi,

$$u_1 + \delta u_x + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} + \mu u_{xy} = 0 \quad (3.7.22)$$

şeklinde olan, lineer olmayan, Rossby dalgaları [32] için, Zakharov-kuznetsov denklemini göz önünde bulunduralım.

Bir sonraki koordinat sisteminde;

$$u(x, y, t) = u(\xi), \quad \xi = kx + ly - ct \quad (3.7.23)$$

bunun hareketli dalga çözümünü araştırırız.

Burada c açısal frekans, k ve l sırasıyla x ve y doğrultusunda dalga numaralarıdır. (3.7.23)'ü (3.7.22)'de yerine koyarak,

$$u'' - \frac{c - \delta k}{\beta k^3 + y k l^2} u + \frac{\alpha k}{2(\beta k^3 + \gamma k l^2)} p.u^2 = c \quad (3.7.24)$$

denklemini elde ederiz. Şimdi aşağıdaki homotopiyi kurarız,

$$u'' - \frac{c - \delta k}{\beta k^3 + \gamma k \ell^2} u + \frac{\alpha k}{2(\beta k^3 + \gamma k \ell^2)} p \cdot u^2 = c \quad (3.7.25)$$

ve (3.7.25)'e periyodik çözümünün, p 'nin bir kuvvet serisi şeklinde yazılmış olabileceğini varsayalım:

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots \quad (3.7.26)$$

(3.7.25)'in sağ yanındaki lineer terimin katsayısını ve c sabitini p 'nin serilerine açabiliriz.

$$-\frac{c - \delta k}{\beta k^3 + \gamma k \ell^2} = \omega^2 + p\omega_1 + p^2\omega_2 + \dots \quad (3.7.27)$$

$$c = pc_1 + p^2c_2 + \dots \quad (3.7.28)$$

(3.7.26), (3.7.27) ve (3.7.28)'i (3.7.25)'te yerine koyma ve p 'nin aynı kuvvetli terimlerini toplayarak çözmek için aşağıdaki homojen olmayan lineer denklemleri elde ederiz:

$$u_0'' + \omega^2 u_0 = 0 \quad (3.7.29)$$

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + \omega_1 u_0 + \frac{\alpha k}{2(\beta k^3 + \gamma k \ell^2)} u_0^2 - c_1 = 0 \quad (3.7.30)$$

$$u_2'' + \omega u_2 + \omega_1 u_1 + \omega_2 u_0 + \frac{\alpha k}{(\beta k^3 + \gamma k \ell^2)} u_0 u_1 - c_2 = 0 \quad (3.7.31)$$

Denklem (3.7.29) $u_0 = A \cos \omega \xi$ çözümüne sahiptir. Eğer bu sonucu (3.7.30)'de yerine koyarsak, u_1 için aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$U_1'' + \omega^2 U_1 + \omega_1 A \cos \omega \xi + \frac{\alpha k A^2}{4(\beta k^3 + \gamma k \ell^2)} \cos 2\omega \xi + \frac{\alpha k A^2}{4(\beta k^3 + \gamma k \ell^2)} - c_1 = 0 \quad (3.7.32)$$

u_1 'deki seküler terimleri yok etmek aşağıdaki denklemleri gerektirir.

$$\omega_1 = 0 \quad (3.7.33)$$

$$c_1 = \frac{\alpha k A^2}{4(\beta k^3 + \gamma k \ell^2)} \quad (3.7.34)$$

Böylece denklem (3.7.32) aşağıdaki hale gelir.

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + \frac{\alpha k A^2}{4(\beta k^3 + \gamma k \ell^2)} \cos 2\omega \xi = 0 \quad (3.7.35)$$

Bu denklemin özel çözümü aşağıdaki gibi olur.

$$u_1 = \frac{\alpha k A^2}{12\omega^2(\beta k^3 + \gamma k \ell^2)} \cos 2\omega \xi \quad (3.7.36)$$

Eğer yukarıdaki sonuçları (3.7.21)'de yerine koyup düzenlersek

$$u_2'' + \omega^2 u_2 + \left(\omega_2 + \frac{\alpha^2 k^2 A^2}{24\omega^2(\beta k^3 + \gamma k \ell^2)^2} \right) A \cos \omega \xi + \frac{\alpha^2 k^2 A^3}{24\omega^2(\beta k^3 + \gamma k \ell^2)^2} \cos 3\omega \xi - c_2 = 0 \quad (3.7.37)$$

olur. Tekrar, u_2 'de seküler terimleri yok etmek aşağıdaki denklemleri gerektirir.

$$\omega_2 = -\frac{\alpha^2 k^2 A^2}{24\omega^2(\beta k^3 + \gamma k \ell^2)^2} \quad (3.7.38)$$

$$\text{ve } c_2 = 0 \quad (3.7.39)$$

Eğer 2.derece yaklaşık çözümde durursak, $p = 1$ 'i (3.2.27) ve (3.7.28)'de oluşturarak, aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$-\frac{c - \delta k}{\beta k^3 + \gamma k \ell^2} = \omega_2 - \frac{\alpha^2 k^2 A^2}{24 \omega^2 (\beta k^3 + \gamma k \ell^2)^2} \quad (3.7.40)$$

ve
$$c = \frac{\alpha k A^2}{4(\beta k^3 + \gamma k \ell^2)} \quad (3.7.41)$$

(3.7.40)'dan ω kolayca çözülebilir.

Degasperis-Procosi denklemini [33] göz önünde bulunduralım.

$$u_t - u_{xxx} + 4uu_x = 3u_x u_{xx} + u u_{xx} \quad (3.7.42)$$

$u(x, t) = u(\varepsilon)$, $\varepsilon = x - kt$, denklem (3.7.42), c 'nin integral sabiti olduğu

$$u'' - u + \frac{2}{k}u^2 - \frac{1}{k}u'^2 - \frac{1}{k}u \cdot u'' + c = 0 \quad (3.7.43)$$

denklemini haline gelir. Önceki örnekteki gibi,

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots \quad (3.7.44)$$

$$-1 = \omega^2 + p\omega_1 + p^2\omega_2 + \dots \quad (3.7.45)$$

$$c = pc_1 + p^2c_2 + \dots \quad (3.7.46)$$

olduğunu varsayalım.

Yukarıdaki denklemleri: (3.7.44) ~ (3.7.46), (3.7.43)'te yerine koyarak, aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$u_0'' + \omega^2 u_0 = 0 \quad (3.7.47)$$

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + \omega_1 u_0 + \frac{2}{k} u_0^2 - \frac{1}{k} u_0'^2 - \frac{1}{k} u_0 u_0'' + c_1 = 0 \quad (3.7.48)$$

$$u_2'' + \omega^2 u_2 + \omega_1 u_1 + \omega_2 u_0 + \frac{4}{k} u_0 u_1 - \frac{2}{k} u_0' u_1' - \frac{1}{k} (u_0 u_1' + u_1 u_0'') + c_2 = 0 \quad (3.7.49)$$

(3.7.47) denklemini $u_0 = A \cos \omega \varepsilon$ çözümüne sahiptir. Eğer bu çözüm (3.7.48) de yerine koyulursa, u_1 için aşağıdaki denklemleri elde ederiz:

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + \omega_1 u_0 + \frac{2}{k} A^2 \cos^2 \omega \xi - \frac{1}{k} A^2 \omega^2 \sin^2 \omega \xi + \frac{1}{k} A^2 \omega^2 \cos^2 \omega \xi + c_1 = 0 \quad (3.7.50)$$

Seküler terimlerinin yok edilmesi, aşağıdaki denklemleri gerektirir.

$$\omega_l = 0 \quad (3.7.51)$$

$$c_1 = -\frac{1}{k} A^2 \quad (3.7.52)$$

(3.7.50)'nin özel çözümü; aşağıdaki gibi olur.

$$u_1 = \frac{1}{3k\omega^2} A^2 (1 + \omega^2) \cos 2\omega \xi \quad (3.7.53)$$

Yukarıdaki sonuçları, (3.7.49)'da yerine koyarak, bazı basitleştirmelerden sonra,

$$\begin{aligned}
u_2'' + \omega^2 u_2 + A \left[\omega_2 + \frac{1}{3k^2} A^2 \left(1 + \omega^2 \right) \left(\frac{2}{\omega^2} - 1 \right) \right] \cos \omega \xi \\
+ \frac{1}{3k^2} A^3 \left(1 + \omega^2 \right) \left(3 + \frac{2}{\omega^2} \right) \cos 3\omega \xi + c_2 = 0
\end{aligned} \tag{3.7.54}$$

haline gelir.

Tekrar, seküler terimlerinin yok edilmesi, aşağıdaki denklemleri verir.

$$\omega_2 = -\frac{1}{3k^2} A^2 \left(1 + \omega^2 \right) \left(\frac{2}{\omega^2} - 1 \right) \tag{3.7.55}$$

ve

$$c_2 = 0 \tag{3.7.56}$$

Eğer 2.yaklaşımında durursak, sonra $p = l$ 'de kurarak, aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$-1 = \omega^2 - \frac{1}{3k^2} A^2 \left(1 + \omega^2 \right) \left(\frac{2}{\omega^2} - 1 \right) \tag{3.7.57}$$

ve

$$c = -\frac{1}{k} A^2 \tag{3.7.58}$$

Periyodik çözüm sadece $\omega^2 > 0$ ise mevcuttur, bifurkasyon $\omega^2 = 0$ olduğunda meydana gelir.

Lineer olmayan kübik Schrödinger denklemini [34] inceleyelim.

$$iu_t + u_{xx} - u|u|^2 = 0 \quad (3.7.59)$$

(3.7.59)'un bir durağan (0 gruplu hız) soliton, çözümünün fonksiyon f ve sabit ω 'nin daha sonra hesaplanacak olduğu, aşağıdaki forma sahip olduğunu varsayalım:

$$u(x,t) = f(x)e^{i\omega t} \quad (3.7.60)$$

Üzerine (3.7.60) i (3.7.59)'da yerine koyarak ve üstel terimleri yok ederek aşağıdaki denklemlerini elde ederiz.

$$-\omega \cdot f(x) + f''(x) - f^3(x) = 0 \quad (3.7.61)$$

$$\text{ya da} \quad f'' - \omega f - f^3 = 0 \quad (3.7.62)$$

Aşağıdaki formda bir homotopi kuruyoruz:

$$f'' - \omega f - pf^3 = 0 \quad (3.7.63)$$

Eğer periyodik çözümü araştırmak istersek; $-\omega$ sabitini aşağıdaki formda açarız.

$$-\omega = \Omega^2 + pa_1 + \dots \quad (3.7.64)$$

f_0 ve f_1 için diferansiyel denklemler aşağıdakiler gibi elde edilebilir:

$$f_0'' + \Omega^2 f_0 = 0 \quad , \quad f_0(0) = A, \quad f_0'(0) = 0 \quad (3.7.65)$$

$$f_1'' + \Omega^2 f_1 + a_1 f_0 - f_0^3 = 0 \quad , \quad f_1(0) = 0 \quad f_1'(0) = 0 \quad (3.7.66)$$

Aşağıdaki denklemi elde etmek oldukça kolaydır,

$$\Omega^2 = -\omega - \frac{3}{4}A^2 \quad (3.7.67)$$

Bu yüzden çözüm sadece $\omega < -3A^2/4$ olduğu zaman vardır. $\omega > -3A^2/4$ olduğu takdirde periyodik çözüm var olmaz. Bu koşul altında, ω sabitini, (3.7.63)'de, aşağıdaki formda açarız.

$$\omega = a^2 - pa_1 + \dots \quad (3.7.68)$$

f_0 ve f_1 için diferansiyel denklemleri elde ederiz.

$$f_0'' - a^2 f_0 = 0 \quad (3.7.69)$$

$$f_1'' - a^2 f_1 + a_1 f_0 - f_0^3 = 0 \quad (3.7.70)$$

f 'in sınırlandırıldığını varsayarsanız, sonra (3.7.69)'un çözümünü aşağıdaki gibi ifade ederiz

$$f_0 = D.e^{-ax} \quad (3.7.71).$$

Eğer (3.7.71) kesin çözüm ise, $f_1 \equiv 0$ olur. Lineer olmayan denklemler için bu koşul meydana gelmeyecektir. Buna rağmen yaklaşık olarak, Galerkin methoduyla; aşağıdaki denklemi oluşturacak, koşulu yerine getirmek gerekir.

$$\int_0^\infty (a_1 f_0 - f_0^3) e^{-ax} dx = 0 \quad (3.7.72)$$

oskültörlü denklemleri çözmek için seküler terimleri yok etme gerekliliği gerçekten de Galerkin teknolojisini kullanır.

(3.7.72)'den kolayca aşağıdaki çözümü elde ederiz.

$$a_1 = \frac{1}{2}D^2 \quad (3.7.73)$$

f_1 için tam sonuç bir gereklilik değildir. Aslında, (3.7.72) $x^n e^{-ax}$ ($n > 0$) gibi terimler gerektirmez, bu yüzden;

$$f_1 = c(e^{-ax} - e^{-3ax}) \quad (3.7.74)$$

olduğunu varsayabiliriz.

(3.7.74)'ü (3.7.70)'de yerine koyma, aşağıdaki rezidualle sonuçlanır.

$$R(x) = f_1'' - a^2 f_1 + a_1 f_0 - f_0^3 = c(a^2 e^{-ax} - 9a^2 e^{-3ax}) - a^2 c(e^{-ax} - e^{-3ax}) + a_1 D e^{-ax} - D^3 e^{-3ax} \quad (3.7.75)$$

$R(0)=0$ 'i yerleştirerek, (3.7.74)'deki c sabiti bulunabilir. 1.derece yaklaşık çözümde dururuz, bu;

$$-\omega = -a^2 + \frac{1}{2}D^2 \quad (3.7.76)$$

'yi gerektirir.

$a^2 > 0$ için, periyodik olmayan çözümün koşulu, $\omega + D^2/2 > 0$ 'dır. Yukarıda elde edilmiş $\omega > -3A^2/4$ koşulu ile birleştirerek, yaklaşık olarak bifurkasyon noktasını ve bifurkasyon gerekliliğini saptayabiliriz.

Son örnekteki gibi, Burgers denklemini inceleyelim:

$$u_t + auu_x = \eta u_{xx} \quad (3.7.77)$$

$u(x,t) = u(\varepsilon)$, $\varepsilon = x-ct$ dönüşümü ile denklem (3.7.77), (sıralama) diferansiyel denkleminde dönüşür: (üsler ε 'na göre türev anlamına gelir.)

Eğer soliton çözümü araştırmak içinse, aşağıdaki formda homotopi kurarız:

$$\eta u'' + cu' - puu' = 0 \quad (3.7.79)$$

Çözüm ve c sabitini p 'nin kuvvet serilerine açarak,

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots \quad (3.7.80)$$

$$c = c_0 + pc_1 + p^2c_2 + \dots \quad (3.7.81)$$

elde ederiz.

f_0 ve f_1 için aşağıdaki diferansiyel denklemi elde ederiz:

$$\eta u_0'' + c_0 u_0' = 0 \quad (3.7.82)$$

$$\eta u_1'' + c_0 u_1' + c_1 u_0' - au_0 u_0' = 0 \quad (3.7.83)$$

(3.7.82)'nin genel çözümü aşağıdaki gibi olur:

$$u_0 = c + D \exp\left(-\frac{c_0}{\eta} \varepsilon\right) \quad (3.7.84)$$

(3.7.84)'ü (3.7.83)'de yerine yazarsak;

$$\eta u_1'' + c_0 u_1' - \frac{c_0 c_1 D}{\eta} \exp\left(-\frac{c_0}{\eta} \xi\right) + \frac{ac_0 D}{\eta} \exp\left(-\frac{c_0}{\eta} \varepsilon\right) \left(c + D \exp\left(-\frac{c_0}{\eta} \varepsilon\right)\right) = 0 \quad (3.7.85)$$

bulunur. Bunu da basitleştirerek aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\eta u_1'' + c_0 u_1' - \frac{c_0 D}{\eta} (c_1 - ac) \exp\left(-\frac{c_0}{\eta} \xi\right) + \frac{ac_0 D^2}{\eta} \exp\left(-\frac{2c_0}{\eta} \xi\right) = 0 \quad (3.7.86)$$

Burada $\varepsilon \exp(-c_0 \varepsilon / \eta)$ 'in terimlerini yok etmek aşağıdaki denklemi gerektirir.

$$c_1 = aC. \quad (3.7.87)$$

(3.7.87) değeri, (3.7.86)'da yerine yazılırsa.

$$u_1 = \frac{aD^2 \eta}{2c_0 \eta - 4} \left[\exp\left(-\frac{2c_0}{\eta} \varepsilon\right) - \exp\left(-\frac{c_0}{\eta} \varepsilon\right) \right] \quad (3.7.88)$$

elde edilir. Böylece 1.derece yaklaşık çözüm, aşağıdaki şekildedir:

$$u = u_0 + u_1 = c + D \exp\left(-\frac{c_0}{\eta} \varepsilon\right) + \frac{aD^2 \eta}{2c_0 \eta - 4} \left[\exp\left(-\frac{2c_0}{\eta} \varepsilon\right) - \exp\left(-\frac{c_0}{\eta} \varepsilon\right) \right] \quad (3.7.89)$$

Burada

$c = c_0 C$ değeri (3.7.89) denkleminde yerine yazılırsa

(2.6)'da gösterilmiş olan üstel Padé teknolojisi ile aşağıdaki soliton çözümü

$$u(x, t) = \frac{c + A \exp\left(-\frac{c_0}{\eta} (x - ct)\right)}{1 + B \exp\left(-\frac{c_0}{\eta} (x - ct)\right)} \quad (3.7.90)$$

elde edilir.

Burada A ve B aşağıdaki koşullardan tanımlanabilir:

$$A - B = D - \frac{aD^2\eta}{2c_0\eta - 4} \quad (3.7.91)$$

$$AB = -\frac{aD^2\eta}{2c_0\eta - 4} \quad (3.7.92)$$

(3.7.91) ve (3.7.92) denklemlerinden A ve B kolayca bulunabilir.

3.8. Jakobi Eliptik Denklemlerinin Periyodik çözümü

Jakobi Eliptik denklemini göz önünde bulunduralım:

$$u'^2 = a + bu^2 + cu^4. \quad (a, b \text{ ve } c \text{ sabit}) \quad (3.8.1)$$

Bu çeşit denklemler, lineer olmayan dalga denklemlerinde çok çalışıldı. Denklem (3.8.1)'in t'ye göre diferansiyelini alarak;

$$2u'u'' = 2buu' + 4cu^3u' \quad (3.8.2)$$

denklemini, ya da daha dabisitleştirerek,

$$u'' - bu - 4cu^3 = 0 \quad (3.8.3)$$

denklemini elde ederiz.

Homotopi perturbasyon methoduna başvurmak için, aşağıdaki basit homotopiyi kurarız,

$$u'' - bu - 4cpu^3 = 0, \quad p \in [0,1] \quad (3.8.4)$$

Homotopi parametresi p her zaman 0'dan birim elemana deđiřtirir. $p = 0$ olduğu takdirde, (3.8.4) denklemi bir lineer denklem haline gelir ve 1 olduğu zaman (3.8.3) denklemi (3.8.3) denklemi ile sonuřlanır.

Homotopi Peturbasyon metodundan dolayı, çözümlü açmak için homotopi parametresi p 'yi kullanırız:

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots \quad (3.8.5)$$

Modife edilmiş Lindstedt-Poincare methodu'nun dilinde, (3.8.4)'te u 'nun katsayısını aşağıdaki formda açarız.

$$-b = \omega^2 + p\omega_1 + p^2\omega_2 + \dots \quad (3.8.6)$$

(3.8.5) ve (3.8.6)'yi denklem (3.8.4)'te yerine koyarak ve p 'nin kuvvetleri terimleriyle eşitlenerek, lineer denklemlerin serilerini elde edebiliriz ve sadece ilk 2 lineer denklemi yazarız:

$$u_0'' + \omega^2 u_0 = 0 \quad (3.8.7)$$

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + \omega_1 u_0 - 4cu_0^3 = 0 \quad (3.7.8)$$

(3.7.8)'nin genel çözümlü aşağıdaki gibi olur.

$$u_0(x) = a \sin(\omega x + \theta), \quad (3.8.9)$$

Burada a ve θ sabit olup, u_0 'ı (3.8.14) denklemde yerine koyarak u_1 için bir diferansiyel denklem elde ederiz:

$$u_1 + \omega^2 u_1 + \omega_1 a \sin(\omega x + \theta) - 4ca^3 \sin^3(\omega x + \theta) = 0 \quad (3.8.10)$$

$$\text{ya da } u_1'' + \omega^2 u_1 + a(\omega_1 - 3ca^2) \sin(\omega x + \theta) - 3ca^3 \sin 3(\omega x + \theta) = 0 \quad (3.8.11)$$

u_1 'deki seküler terimleri yok etmek, aşağıdaki denklemi gerektirir.

$$\omega_1 = 3ca^2 \quad (3.8.12)$$

Böylece (3.8.11)'in çözümü,

$$u_1 = -\frac{1}{8}ca^3 \sin 3(\omega x + \theta) \quad (3.8.13)$$

şeklindedir

Bu yüzden aşağıdaki 1.derece yaklaşık çözümü elde ederiz.

$$u = u_0 + u_1 = a \sin(\omega x + \theta) - \frac{1}{8}ca^3 \sin 3(\omega x + \theta) \quad (3.8.14)$$

$$\text{ve } -b = \omega^2 + 3ca^2 \quad (3.8.15)$$

$$\text{ya da } \omega^2 = -(b+3ca^2) \quad (3.8.16)$$

Aşağıdaki eşitsizlik:

$$b^2 + 3ca^2 < 0 \quad (3.8.17)$$

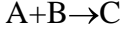
olduğu takdirde, Jacobi Eliptik denklemin periyodik çözümü vardır, bunun frekansı aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\omega = \sqrt{-(b+3ca^2)} \quad (3.8.18)$$

Kesinlikle, önerilen metoda diğer lineer olmayan denklemler için kolayca başvurulabilir.

3.9. Bimoleküler Reaksiyon

Aşağıdaki bimoleküler reaksiyonu inceleyelim.



Kimyasal reaksiyonların hareketini veren denklem şu şekilde yazılır:

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x) = kab - k(a+b)x + kx^2, \quad a < b \quad (3.9.1)$$

Burada; a ve b sabitleri, t = 0'daki A ve B molekülleri için bulunurlar ve x, t'den sonraki zamanda c'nin moleküllerinin numarası, k ise reaksiyon sabitidir. Reaksiyonun başlangıcında (t = 0), henüz oluşmuş c molekülleri yoktur, bu yüzden başlangıç koşulu $x(0) = 0$ 'dır. Tüm A molekülleri tükendiği zaman ($a < b$), c moleküllerinin sayısında daha fazla bir artış meydana gelmez, bu yüzden $dx/dt = 0$ olur. Bunu denklem (3.9.1)'de yerine koyunca, c moleküllerinin son sayısı $x_\infty = a$ olur, bu yüzden sıfıncı merteye yaklaşık sonuç aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$x_0 = a(1 - e^{-\omega t}) \quad (\omega \text{ bilinmeyen sabit}) \quad (3.9.2)$$

Denklem (3.9.2) bir sonraki lineer denklemin çözümüdür:

$$\frac{dx}{dt} + \omega x - a\omega = 0, \quad x(0) = 0 \quad (3.9.3)$$

Böylece aşağıdaki formda bir homotopi kurarız:

$$\frac{dx}{dt} + \omega x - a\omega = p[kab - a\omega - (ka + kb - \omega)x + kx^2] \quad (3.9.4)$$

Homotopi pertürbasyon metoduna göre, çözüm aşağıdaki formda ifade edilebilir:

$$x = x_0 + px_1 + p^2x_2 + \dots \quad (3.9.4)$$

(3.9.5)'i (3.9.4)'te yerine koyarak ve p'nin aynı kuvvetli terimlerini toplayarak, x_0 ve x_1 için aşağıdaki diferansiyel denklemi elde ederiz.

$$\frac{dx_0}{dt} + \omega x_0 - a\omega, \quad x_0(0) = 0 \quad (3.9.6)$$

$$\frac{dx_1}{dt} + \omega x_1 = kab - a\omega - (ka + kb - \omega)x_0 + kx_0^2, \quad x_1(0) = 0 \quad (3.9.7)$$

(3.9.6) denkleminin çözümü $x_0 = a(1 - e^{-\omega t})$ olur. Eğer bu çözüm (3.9.7)'de yerine konursa, x_1 için bir sonraki denklemi elde ederiz:

$$\frac{dx_1}{dt} + \omega x_1 = kab - a\omega - a(ka + kb - \omega)(1 - e^{-\omega t}) + ka^2(1 - 2e^{-\omega t} + e^{-2\omega t}) \quad (3.9.8)$$

(3.9.8) denklemi aşağıdaki formda yeniden düzenleyelim:

$$\frac{dx_1}{dt} + \omega x_1 = [a(ka + kb - \omega) - 2ka^2]e^{-\omega t} + ka^2e^{-2\omega t} \quad (3.9.9)$$

x_1 'deki $te^{-\omega t}$ terimlerini yok etme aşağıdaki denklemi gerektirir.

$$a(ka + kb - \omega) - 2ka^2 = 0 \quad (3.9.10)$$

Burada ω aşağıdaki şekilde bulunabilir.

$$\omega = k(b - a) \quad (3.9.11)$$

Şimdi denklem (3.9.9) aşağıdaki denkleme indirgenir:

$$\frac{dx_1}{dt} + \omega v_1 = ka^2 e^{-2\omega t} \quad (3.9.12)$$

$x_1(0) = 0$ olduğundan dolayı, denklem (3.9.12)'nin çözümü aşağıdadır:

$$x_1 = -\frac{ka^2}{\omega} (e^{-2\omega t} - e^{-\omega t}) \quad (3.9.13)$$

Eğer 1. mertebeden yaklaşık çözüm yeterli ise, $p = 1$ 'i oluştururuz ve aşağıdaki sonucu buluruz:

$$x = x_0 + x_1 = a(1 - e^{-\omega t}) - \frac{ka^2}{\omega} (e^{-2\omega t} - e^{-\omega t}) \quad (3.9.14)$$

Sonuçları karşılaştırmak için, $a = 1$ ve $b = 2$ 'deki duruma dikkat edelim. Bu koşullar altında, kolayca aşağıdaki tam sonucu buluruz:

$$x_{ex} = -\frac{2(1 - e^{-kt})}{2 - e^{-kt}} \quad (3.9.15)$$

Bunun yarıyol zamanı:

$$t_{1/2} = \frac{0.4054}{k} \quad (3.9.16)$$

şeklinde olur. Bu; c moleküllerinin sayısı $t_{1/2} = \frac{0.4054}{k}$ iken yarıyoluna ulaşmış

olduğu anlamına gelir. $\left[x = \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \right]$

(3.9.14)'ten aşağıdaki yaklaşık yarıyol zamanı elde edilir:

$$t_{1/2} = \frac{0.3466}{k} \quad (3.9.17)$$

Bu yüzden 1. mertebe yaklaşık çözüm için 14.5 % doğruluğa ulaşır. Genel söylemde, her zaman, x_n ($n \geq 2$)'de ortaya çıkacak olan seküler terimler için 1. derece yaklaşımlarda dururuz. Eğer 14.5 % doğruluk mühendislik uygulamaları için yeteri kadar iyi değilse, yüksek derece yaklaşımlara gerek duyulur. Bunu sonlandırmak için, aşağıdaki homotopiyi kurarız.

$$\frac{dv}{dt} + k(a+b)x - a\omega = p(kab - a\omega + kx^2) \quad (3.9.18)$$

$k(a+b)$ sabitini p 'nin kuvvet serilerine açarız:

$$k(a+b) = \omega + p\omega_1 + p^2\omega_2 + \dots \quad (3.9.19)$$

(3.9.5) ve (3.9.19)'u (3.9.18)'de yerine koyarak, lineer denklemler serisini elde ederiz:

$$\frac{dx_0}{dt} + \omega x_0 - a\omega = 0 \quad x_0(0) = 0 \quad (3.9.20)$$

$$\frac{dx_1}{dt} + \omega x_1 - \omega_1 x_0 = kab - a\omega + kx_0^2 \quad x_1(0) = 0 \quad (3.9.21)$$

$$\frac{dx_2}{dt} + \omega x_2 - \omega_2 x_0 + \omega_1 x_1 = 2kx_0 x_1, \quad x_2(0) = 0 \quad (3.9.22)$$

Bilinmeyen sabit ω_n , x_n ($n = 1, 2, 3, \dots$)'deki seküler terimlerin yok edilmesinden dolayı bulunur. Çözüm yöntemi ana konuda belirtilenle aynıdır ve uzaydaki çözümü bulmak için detayları tartışmayacağız.

Homotopi perturbasyon metoduyla elde edilmiş olan düzenleme formulasyonu denklem (3.9.14) , basit olduğu kadar anlaşılabilirlikte olup doğrudan pratik düzenlemeye başvurabiliriz.

3.10. İki Nokta sınır-değer problemleri

Aşağıdaki denklemi inceleyelim:

$$u'' + \lambda u = 0 \quad (3.10.1)$$

Denklemin sınır koşulları aşağıdaki gibidir.

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (3.10.2)$$

Yukarıdaki problem $u(x) = 0$ aşıkâr çözümüne sahiptir. λ 'nın değerleri için sınır koşullarını sağlayan aşıkâr olmayan çözüm acaba mevcut mudur?

Bu tür sorular ilk kez Sturm ve Lioauille tarafından son 19. yy'da araştırılmıştır. λ değerleri karakteristik değerler ya da öz değerler olarak adlandırılır ve bağlantılı çözümler ise karakteristik fonksiyonlar ya da öz fonksiyonlar olarak ifade edilir.

Aşıkâr olmayan çözümler sadece ve sadece $\lambda = n^2 \pi^2$. $n=1,2,3,\dots$ olduğunda vardır ve bu çözümler;

$$\int_0^1 u_n^2 dx = 1 \quad (3.10.3)$$

koşulu ile normalleştirildiğinde, $u_n = \sqrt{2} \sin n\pi x$ olur.

Şimdi aşağıdaki 2-noktanın sınır değer problemini inceleyelim:

$$u'' + \lambda u + \varepsilon u^3 = 0, \quad u(0) = u(1) = 0 \quad (3.10.4)$$

Aşağıdaki formda bir homotopi kuralım:

$$u'' + \lambda u + \varepsilon p u^3 = 0 \quad (3.10.5)$$

Aşık olmaya çözüm ve λ , p 'nin kuvvet formunda açılacağı varsayılarak, aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$u = u_0 + p u_1 + \dots \quad (3.10.6)$$

$$\lambda = \omega^2 + p \omega_1 + \dots \quad (3.10.7)$$

Basit bir işlem ile aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$u_0'' + \omega^2 u_0 = 0, \quad u_0(0) = u_0(1) = 0 \quad (3.10.8)$$

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + \varepsilon u_0^3 + \omega_1 u_0 = 0, \quad u_1(0) = 0, \quad u_1'(0) = 0 \quad (3.10.9)$$

(3.10.8)'in genel çözümü aşağıdaki şekildedir:

$$u_0 = A \sin \omega x + B \cos \omega x \quad (3.10.10)$$

Sınır koşulları $u_0(0) = u_0(1) = 0$ i birleştirme $B = 0$ 'ı verir ve

$$u_0 = A \sin n \pi x \quad (3.10.11)$$

bulunur.

Eğer u_0 , (3.10.9)'da yerine konulursa ve sonuçtaki denklem basitleştirilirse aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$u''_1 + \omega^2 u_1 + A(\omega_1 + \frac{3}{4} \varepsilon A^2) \sin n\pi x - \frac{1}{4} \varepsilon A^3 \sin 3n\pi x \quad (3.10.12)$$

u_1 'deki seküler terimleri yok etme aşağıdaki denklemi gerektirir.

$$\omega_1 = -\frac{3}{4} \varepsilon A^2 \quad (3.10.13)$$

(3.10.12)'nin genel çözümü aşağıdaki gibi olur:

$$\omega_1 = -\frac{\varepsilon A^3}{32n^2 \pi^2} \sin 3n\pi x + C \sin n\pi x + D \cos n\pi x \quad (3.10.14)$$

Sınır koşullarını birleştirme $D = 0$ ile sonuçlanır ve c keyfi sabit olabilir.

Aşağıdaki uygunluğun gerekçesi için $u_1(0) = 0$ yeni koşulunu tanıtırız, böylece aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\omega_1 = -\frac{\varepsilon A^3}{32n^2 \pi^2} (\sin 3n\pi x + 3 \sin n\pi x) \quad (3.10.15)$$

1.mertebe yaklaşık çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u(x) = A \sin n\pi x - \frac{\varepsilon A^3}{32n^2 \pi^2} (\sin 3n\pi x + 3 \sin n\pi x) \quad (3.10.16)$$

Burada yeni normalleştirilmiş koşul $u'(0) = 1$ 'i sadece uygunluk gerekçeleri için kullanılır.

n karakteristik değer aşağıdaki forma sahiptir:

$$\lambda = n^2 \pi^2 - \frac{3\varepsilon}{4n^2 \pi^2} \quad (3.10.18)$$

Normalleştirme koşulları (3.10.3) kullanıldığında, sıfırcı mertebe yaklaşık çözüm, aşağıdaki gibi olur.

$$u(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x \quad (3.10.19)$$

$$\lambda = n^2 \pi^2 - \frac{3}{2} \varepsilon \quad (3.10.20)$$

Şimdi aşağıdaki özdeğer problemini göz önünde bulunduralım.

$$u'' + \lambda u + \frac{1}{x} u = 0, \quad u(0) = u(1) = 0 \quad (3.10.21)$$

Aşağıdaki formda bir homotopi kuralım:

$$xu'' + x\lambda u + pu = 0 \quad (3.10.22)$$

Önceki örnekte olduğu gibi, aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$x(u_0'' + \omega^2 u_0) = 0 \quad u_0(0) = u_0(1) = 0 \quad (3.10.23)$$

$$x(u_1'' + \omega^2 u_1 + \omega_1 u_0) + u_0 = 0 \quad u_1(0) = 0 \quad u_1'(0) = 0 \quad (3.10.24)$$

(3.10.23)'ün çözümü $u_0 = A \sin n\pi x$ olur. Böylece denklem (3.10.24) aşağıdaki gibi olur.

$$x(u_1'' + \omega^2 u_1) + (x\omega_1 + 1)A \sin n\pi x = 0 \quad (3.10.24a)$$

$$\int_0^1 (x\omega_1 + 1) \sin^2 n\pi x dx = 0 \quad (3.10.24b)$$

denklemlerini ω_1 'i belirlemek için oluştururuz.

(3.10.24)'ten $\omega_l = -2$ elde ederiz. $p = I$ 'i yerleştirerek, aşağıdaki öz değerleri denk öz fonksiyonlarla elde ederiz.

$$\lambda = n^2 \pi^2 - 2 \quad (3.10.25)$$

$$u = \frac{\sin n \pi x}{n \pi} \quad (3.10.26)$$

Kesinlikle, önerilen metoda daha karışık özdeğer problemleri için başvurabiliriz.

3.11.Güçlü Nonlinear Salınımlar

Bu bölümde homotopi pertürbasyon metoduna bazı özel güçlü lineer olmayan oskülatörler için başvuracağız.

Örnek 1

İlk olarak aşağıdaki denklem göz önünde bulundurulur.

$$u'' + mu + au^2u'' + buu'^2 + cu^3 = 0, \quad u(0) = A, \quad u'(0) = 0 \quad (3.11.1)$$

(a , b ve c parametredir, m de $(-1,0,1)$ değerlerinden birini alabilir).

Lineer olmayan denklemlerin bu çeşidi çeşitli oskülatör fenomenleri olarak doğal bilimlerde ve mühendislik bilimlerinde ortaya çıkar. Hamdan ve Shabaneh [35]'i yukarıdaki denklemle modellenebilen, lineer olmayan oskülatörlerin geniş argümentleri serbest vibrasyonunu araştırır.

Mickens, [36], faz uzayı analiziyle yukarıdaki denklemin bir nitel çalışmasını verir. Çok önemli bir konusu, bunun yaklaşık periyodunu ya da frekansını araştırmaktır.

Aşağıdaki formda bir homotopi kuralım:

$$u'' + mu + p(au^2u'' + buu'^2 + cu^3) = 0 \quad (3.11.2)$$

Çözümün ve sabit olan m 'nin aşağıdaki formlarda ifade edilebileceğini varsayalım:

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots, \quad (3.11.3)$$

$$m = \omega^2 + p\omega_1 + p^2\omega_2 + \dots \quad (3.11.4)$$

(3.11.3) ve (3.11.4)'ü (3.11.2)'de yerine koyarsak ve p 'nin katsayılarına göre oluşturulan denklemleri 0'a eşitleyerek, aşağıdaki bağıntıları elde ederiz.

$$u_0'' + \omega^2u_0 = 0 \quad u_0(0) = A \quad u_0'(0) = 0 \quad (3.11.5)$$

$$u_1'' + \omega^2u_1 + \omega_1u_0 + au_0^2u_0'' + bu_0u_0'^2 + cu_0^3 = 0, \quad u_1(0) = 0, \quad u_1'(0) = 0 \quad (3.11.6)$$

(3.11.5)'in çözümü $u_0 = A \cos \omega t$ olur. u_0 'ı (3.11.6)'da yerine koyma aşağıdaki denklemleri verir:

$$u_1'' + \omega^2u_1 + A\omega_1 \cos \omega t + A^3(c - a\omega^2) \cos^3 \omega t + bA^3\omega^2 \cos \omega t \sin^2 \omega t = 0 \quad (3.11.7)$$

(3.11.7) daha basit olarak.

$$u_1'' + \omega^2u_1 + A \left(\omega_1 + \frac{3}{4}A^2(c - a\omega^2) + \frac{1}{4}bA^2\omega^2 \right) \cos \omega t + \frac{1}{4}A^3(c - a\omega^2 - b\omega^2) \cos 3\omega t = 0 \quad (3.11.8)$$

biçiminde ifade edilir.

u_1 'deki seküler terimleri yok etme,

$$\omega_1 = -\frac{3}{4}A^2(c - a\omega^2) - \frac{1}{4}bA^2\omega^2 \quad (3.11.9)$$

'yi gerektirir.

Sonuç olarak diferansiyel denklemin çözümünde u_1 :

$$u_1 = \frac{1}{32\omega^2}A^3(c - a\omega^2 - b\omega^2)(\cos 3\omega t - \cos \omega t) \quad (3.11.10)$$

olarak bulunur.

1.mertebe periyodik çözüm ise aşağıdaki gibidir:

$$u = u_0 + u_1 = A \cos \omega t + \frac{1}{32\omega^2}A^3(c - a\omega^2 - b\omega^2)(\cos 3\omega t - \cos \omega t) \quad (3.11.11)$$

(3.11.4)'te aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$m = \omega^2 + \omega_1 \quad (3.11.12)$$

(3.11.12) ve (3.11.9) un birlikte çözümü bir sonraki denklemi verir.

$$\omega^2 = \frac{m + \frac{3}{4}cA^2}{1 + \frac{3}{4}aA^2 - \frac{1}{4}bA^2} \quad (3.11.13)$$

ω^2 her zaman pozitif olduğundan, (3.11.13)'ün periyodik çözümü sadece aşağıdaki koşul gerçekleştiğinde vardır.

$$\left(m + \frac{3}{4}cA^2\right)\left(1 + \frac{3}{4}aA^2 - \frac{1}{4}bA^2\right) > 0 \quad (3.11.14)$$

Örnek 2

Duffing hermonik oskilatörünü [37] göz önünde bulunduralım.

$$u'' + \frac{\bar{a}u^3}{\bar{b} + \bar{c}u^2} = 0 \quad u(0) = A \quad u'(0) = 0 \quad (3.11.15)$$

(3.11.15)'i aşağıdaki formda

$$(\bar{b} + \bar{c}u^2)u'' + \bar{a}u^3 = 0 \quad (3.11.16)$$

$$\text{ya da,} \quad u'' + au^3 + cu^2u'' = 0 \quad (3.11.17)$$

formunda yazalım. $[a = \bar{a}/\bar{b}, c = \bar{c}/\bar{b}]$

Aşağıdaki formda bir homotopi kuralım:

$$u'' + 0.u + p(au^3 + cu^2u'') = 0 \quad (3.11.18)$$

çözümü ve 0 katsayısını aşağıdaki şekilde açarız.

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots \quad (3.11.19)$$

$$0 = \omega^2 + p\omega_1 + p^2\omega_2 + \dots \quad (3.11.20)$$

Böylece aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$u_0'' + \omega^2u_0 = 0 \quad u_0(0) = A \quad u_0'(0) = 0 \quad (3.11.21)$$

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + \omega_1 u_0 + a u_0^3 + c u_0^2 u_0'' = 0 \quad u_1(0) = 0 \quad u_1'(0) = 0 \quad (3.11.22)$$

(3.11.21)'in çözümü $u_0 = A \cos \omega t$ olur. u_0 'ı (3.11.22)'de yerine koyma aşağıdaki denklemi verir:

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + A \left(\omega_1 + \frac{3}{4} A^2 (a - c \omega^2) \right) \cos \omega t + \frac{1}{4} (a - c \omega^2) A^3 \cos 3\omega t = 0 \quad (3.11.23)$$

u_1 'deki seküler terimleri yok etme

$$\omega_1 = -\frac{3}{4} A^2 (a - c \omega^2) \quad (3.11.24)$$

'yi gerektirir.

Eğer 1.mertebe yaklaşım yeterli ise, daha sonra (3.11.20)'den

$$\omega^2 = -\omega_1 = \frac{3}{4} A^2 (a - c \omega^2) \quad (3.11.25)$$

ya da
$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{3}{4} a A^2}{1 + \frac{3}{4} c A^2}} \quad (3.11.26)$$

denklemlerini elde ederiz.

Örnek 3

Bir $x^{4/3}$ potansiyelindeki [38] oskülasyonunu inceleyelim.

$$u'' + u^{1/3} = 0 \quad u(0) = A \quad u'(0) = 0 \quad (3.11.27)$$

(3.11.27)'yi aşağıdaki formda yeniden yazalım.

$$u''^3 + u = 0 \quad (3.11.28)$$

Aşağıdaki formda bir homotopi kuralım.

$$0.u'' + 1.u + pu''^3 = 0 \quad (3.11.29)$$

çözümü, 0 ve 1 sabitlerini aşağıdaki formlarda açarız.

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots \quad (3.11.30)$$

$$0 = 1 + pa_1 + p^2a_2 + \dots \quad (3.11.31)$$

$$1 = \omega^2 + p\omega_1 + p^2\omega_2 + \dots \quad (3.11.32)$$

Böylece aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$u_0'' + \omega^2u_0 = 0 \quad u_0(0) = A \quad u_0'(0) = 0 \quad (3.11.33)$$

$$u_1'' + \omega^2u_1 + a_1u_0'' + \omega_1u_0 + u_0''^3 = 0 \quad u_1(0) = 0, \quad u_1'(0) = 0 \quad (3.11.34)$$

$u_0 = A \cos \omega t$ 'yi (3.11.34)'te yerine koyma ile aşağıdaki denklemi buluruz.

$$u_1'' + \omega^2u_1 + A \left(\omega_1 - a_1\omega^2 - \frac{3}{4}A^2\omega^6 \right) \cos \omega t - \frac{1}{4}A^3\omega^6 \cos 3\omega t = 0 \quad (3.11.35)$$

seküler terimlerin yok edilmesi aşağıdaki denklemi verir.

$$\omega_1 - a_1\omega^2 - \frac{3}{4}A^2\omega^6 = 0 \quad (3.11.36)$$

Eğer birinci mertebeye yaklaşık çözüm yeterli ise, (3.11.31) ve (3.11.32) den aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$1 + a_1 = 0 \quad (3.11.37)$$

$$\omega^2 + \omega_1 = 1 \quad (3.11.38)$$

(3.11.36), (3.11.37) ve (3.11.38)'i birlikte çözümlürek;

$$\omega = \left(\frac{4}{3A^2} \right)^{1/6} \quad (3.11.39)$$

bulunur.

Örnek 4

Fraktal potansiyelli daha genel bir oskilatörü inceleyelim:

$$u'' + u + u^{1/3} = 0 \quad u(0) = A \quad u'(0) = 0 \quad (3.11.40)$$

Bir sonraki homotopiyi kuralım.

$$(1 - p)(u'' + \omega^2 u - \nu u'' - \omega^2 u_0) + p(u'' + u + u^{1/3}) = 0 \quad (3.11.41)$$

Basit bir işlemle, aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$u_0'' + \omega^2 u_0 = \nu_0'' + \omega^2 \nu_0, \quad u_0(0) = A \quad u_0'(0) = 0 \quad (3.11.42)$$

$$u_0'' + \omega^2 u_1 + u_0'' + \omega^2 u_0 - \nu_0'' - \omega^2 \nu_0 + u_0'' + u_0 + u_0^{1/3} = 0 \quad u_1(0) = A \quad u_1'(0) = 0 \quad (3.11.43)$$

Bunun için

$$u_0 = v_0 A \cos^3 \omega t \quad (3.11.44)$$

ile başlarız.

(3.11.44)'i (3.11.45)'te yerine koyma ile aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + 6A\omega^2 \cos \omega t \sin^2 \omega t - 3A\omega^2 \cos^3 \omega t + A \cos^3 \omega t + A^{1/3} \cos \omega t = 0 \quad (3.11.45)$$

yukarıdaki denklemi aşağıdaki gibi basitleştiririz:

$$u_1'' + \omega^2 u_1 + \left[6A\omega^2 + A^{1/3} + \frac{3}{4}(1-9\omega^2)A \right] \cos \omega t + \frac{1}{4}(1-9\omega^2)A \cos 3\omega t = 0 \quad (3.11.46)$$

u_1 'deki seküler terimleri yok etme aşağıdaki denklemi gerektirir.

$$6\omega^2 + A^{-2/3} + \frac{3}{4}(1-9\omega^2) = 0 \quad (3.11.47)$$

$$\text{ya da } \omega = \sqrt{1 + \frac{4}{3}A^{-2/3}} \text{ dir.} \quad (3.11.48)$$

Örnek 5

Bir sonraki oskilatörü göz önünde bulunduralım.

$$u'' + (1 + u'^2)u = 0 \quad u(0) = A \quad u'(0) = 0 \quad (3.11.49)$$

Aşağıdaki homotopiyi kuralım:

$$u'' + 1.u + pu'^2u = 0 \quad (3.11.50)$$

çözümü ve '1' sabitini aşağıdaki formlarda açarız.

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots \quad (3.11.51)$$

$$1 = \omega^2 + p\omega_1 + p^2\omega_2 + \dots \quad (3.11.52)$$

Aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$u_0'' + \omega^2u_0 = 0 \quad u_0(0) = A \quad u_0'(0) = 0 \quad (3.11.53)$$

$$u_1'' + \omega^2u_1 + \omega_1u_0 + u_0'^2 + u_0 = 0 \quad u_1(0) = 0 \quad u_1'(0) = 0 \quad (3.11.54)$$

$u_0 = A \cos \omega t$ 'yi (3.11.54)'te yerine koyma ile aşağıdaki denklemi buluruz:

$$u_1'' + \omega^2u_1 + \left(\omega_1A + \frac{1}{4}A^3\omega^2 \right) \cos \omega t - \frac{1}{4}A^3\omega^3 \cos 3\omega t = 0 \quad (3.11.55)$$

u_1 'deki seküler terimlerin yok edilmesi aşağıdaki denklemi verir:

$$\omega_1 - \frac{1}{4}A^2\omega^2 \quad (3.11.56)$$

Eğer 1. mertebe yaklaşık çözümde durursak, (3.11.52)'de

$$1 = \omega^2 - \frac{1}{4}A^2\omega^2 \quad (3.11.57)$$

'yi elde ederiz. Böylece

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{4-A^2}} \quad (3.11.58)$$

bulunur. Bu sonuç, Beatty ve Michens [39] ile elde edilen sonuçla aynıdır.

Örnek 6

Bir bağıl harmonik oskilatörü [43] göz önünde bulunduralım.

$$x'' + (1-x'^2)^{3/2} x = 0 \quad (3.11.59)$$

Aşağıdaki dönüşümü yaparız:

$$x' = \frac{u'}{(1+u^2)^{3/2}} \quad (3.11.60)$$

Bunun türevini alarak aşağıdakini elde ederiz.

$$x'' = \frac{u}{\sqrt{(1+u^2)^{3/2}}} \quad (3.11.61)$$

(3.11.60) ifadesi x' için (3.11.59)'da yerine koyma ile aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$x'' = -(1-x'^2)^{3/2} x = -\left(1 - \frac{u^2}{1+u^2}\right)^{3/2} x = -\frac{x}{(1+u^2)^{3/2}} \quad (3.11.62)$$

(3.11.61) ve (3.11.62)'yi karşılaştırarak,

$$u' = -x \quad (3.11.63)$$

elde ederiz.

Bu yüzden denklem (3.11.59) aşağıdaki hale gelir.

$$u'' = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = 0 \quad (3.11.64)$$

(3.11.64)'u aşağıdaki formda tekrar yazalım:

$$u''^2 - u^2 + u''^2 u^2 = 0 \quad (3.11.65)$$

Şimdi de aşağıdaki formda bir homotopi kurarız.

$$u''^2 - 1.u^2 + pu''^2 u^2 = 0 \quad (3.11.66)$$

çözümün ve (3.11.66) denkleminin sol tarafının orta teriminin katsayısının karesi aşağıdaki formlarda olmak üzere alınır.

$$u^2 = u_0^2 + pu_1^2 + \dots \quad (3.11.67)$$

$$1 = \omega^4 + p\omega_1 + \dots \quad (3.11.68)$$

(3.11.67) ve (3.11.68)'i (3.11.66)'da yerine koyma ve p 'nin aynı kuvvetli katsayılarını eşitleme ile aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$u_0''^2 - \omega^4 u_0^2 = 0 \quad u_0(0) = A \quad u_0'(0) = 0 \quad (3.11.69)$$

$$u_1''^2 + \omega^4 u_1^2 - \omega_1 u_0^2 + u_0''^2 u_0 = 0 \quad u_1(0) = 0 \quad u_1'(0) = 0 \quad (3.11.70)$$

(3.11.69)'un çözümü aşağıdaki gibi olur.

$$u_0 = A \cos \omega t \quad (3.11.71)$$

(3.11.71) değeri (3.11.70)'de yerine yazılırsa

$$u_1''^2 - \omega^4 u_1^2 = \omega_1 A^2 \cos^2 \omega t - A^4 \omega^4 \cos^4 \omega t \quad (3.11.72)$$

bulunur.

Eğer u_0 tam çözüm ise, o zaman $u_1 \equiv 0$, fakat bu durum lineer olmayan denklemler için gerçekleşmez. Umuyoruz ki ω 'nin uygun bir seçimi ile u_0 ihtiyaç duyulan doğrulukların bir yaklaşık çözümü ve u_1 ile yeteri kadar küçük karşılaştırılmış olsun, bu yaklaşık olarak aşağıdaki denklemi oluşturursak sağlanabilir.

$$\int_0^\pi [-\omega_1 A^2 \cos^2 \omega t + A^4 \omega^4 \cos^4 \omega t] \cos \omega t dt = 0 \quad T = 2\pi / \omega \quad (3.11.73)$$

Burada ω_1 ise aşağıdaki gibi tanımlanabilir,

$$\omega_1 = \frac{4}{5} A^2 \omega^4 \quad (3.11.74)$$

Şimdi 1.derecede yaklaşım üzerinde durulacak olursa, (3.11.68) ile aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$1 = \omega^4 + \omega_1 = \left(1 + \frac{4}{5} A^2\right) \omega^4 \quad (3.11.75)$$

Bu yüzden frekans

$$\omega = \left(1 + \frac{4}{5} A^2\right)^{-1/4} \quad (3.11.76)$$

olarak bulunur.

Bunun 0. derece çözümü aşağıdaki gibi ifade edebilir.

$$u = A \cos \left(1 + \frac{4}{5} A^2 \right)^{-1/4} t \quad (3.11.77)$$

Harmonik balanslı metoda göre, Mickens bir sonraki çözümü ise aşağıdaki gibi çözüm elde etmiştir:

$$u = A \cos \left(1 + \frac{1}{2} A^2 \right)^{-1/4} t \quad (3.11.78)$$

4.SONUÇ

- Klasik perturbasyon metotları tanıtılıp bu metotların çeşitli nonlineer problemlerin çözümlerinde karşılaştığı zorluklara yer verilmiştir, bu zorlukların aşmak için neler yapılabileceğinden bahsedilmiştir.
- Klasik perturbasyon metotları için bazı modifikasyonlar yapıp zorluk yaratan problemlerin çözümlerinde etkin yollar üretilmiş ve problem çözümleri daha basit ve yüksek doğruluğa sahip hale getirilmiştir.
- Çeşitli modifiye metotlar (Modifiye Lindstedt-Poincare Metodu, Modifiye Shohat Açılımı, Modifiye Çok-Zamanlı Açılımlar vb.) başlıklar halinde anlatılıp örneklerle etkinlikleri gösterilmiştir.
- Çeşitli problemlerin çözümünde Taylor Serisi Dönüşümü, Padé Yaklaşımı ve Üstel Padé Yaklaşımı kullanılarak çözümlerde etkinlik sağlanmıştır.
- Ji-Huan He tarafından oluşturulan Homotopi perturbasyon metodu anlatılmış ve bu yöntem kullanılarak çeşitli nonlineer problemler çözülmüştür.

KAYNAKLAR DİZİNİ

1.Bölüm Kaynakları

1. Thomas, J.W *Numerical Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1995.
2. Acton, J.R. and Squire, P.T. *Solving Equations with Physical Understanding*, Adam Hilger Ltd, Bristol and Boston, 1985.
3. Nayfeh, A.H. *Perturbation Methods*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2000.
4. Mickens, R.E. *An Introduction to Nonlinear Oscillations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1981.
5. He, J.H. Modified straightforward expansion, *Meccanic*, 34(4), 1999: 287-289.
6. Verhulst, F. *Nonlinear differential equations and dynamical systems*, Springer-Verlag, New York, 1990.
7. Lee, W. K. Et al. Validity of the multiple-scale solution for a subharmonic resonance response of a bar with a nonlinear boundary condition, *J. Sound Vib.*, 208(4), 1997, 597-547.
8. Chapra, S.C., Canale, R.P. *Numerical methods for Engineers*, McGraw-Hill Companies, Inc., 2000.

9. Crisfield, M.A. *Non Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol.1: Essentials*, J. Wiley & Sons, New York, 1991, *Vol. 2: Advanced Topics*, J. Wiley & Sons, New York, 1997.
10. He, J.H. A modified Newton-Raphson Method, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 20,2004, 801-805.
11. Inokuti, M., et al. General use of the Lagrange multiplier in nonlinear mathematical physics. *In: S. Nemat-Nasser (Ed.), Variational Method in the Mechanics of Solids*, Pergamon Press, Oxford, 1978, 156-162.
12. He, J.H. Variational iteration method: a kind of nonlinear analytical technique: some examples, *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 34(4), 1999: 699-708.
13. He, J.H. A review on some new recently developed nonlinear analytical techniques, *Int. J. Nonlinear Sciences & Numerical Simulation*, 1(1), 2000: 51-70.
14. He, J.H. Improvement of Newton iteration method, *International J. of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 1(2), 2000:239-240.
15. He, J.H. A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems, *International J. of Nonlinear Mechanics*, 35(1), 2000: 37-43.
16. Grippo, L., Lampariello, F., Lucidi, S. A nonmonotone line search technique for Newton's method, *SIAM J. Numer. Anal.*, 23, 1986: 707-716.

17. He, J.H. A new iteration method for solving algebraic equations, *Applied Mathematics and Computation*, 135(1) (2003) 81-84.
18. He, J.H., Homotopy perturbation technique, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 178 (1999) 257-262.
19. Bender, C.M., Pinsky, K.S., & Simmons, L.M. A new perturbative approach to nonlinear problems, *J. Math. Phys.*, 30(7), 1989, 1447-1455.
20. Andrianov, I, Manevitch, L. *Asymptotology: Ideas, Methods, and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 2003.
21. He, J.H. A note on delta-perturbation expansion method, *Applied Math. Mech* (English Ed.), 23(6)(2002) 634-638.
22. He, J.H. Asymptotology by Homotopy Perturbation Method, *Applied Mathematics and Computation* 156(3)(2004) 591-596.
23. He, J.H. Ancient Chinese Algorithm: the Ying Buzu Shu (Method of Surplus and Deficiency) vs Newton iteration method, *Applied Math. Mech.* 23(12)(2002) 1255-1260.
24. Dauben, J.W. Ancient Chinese mathematics: the *Jiu Zhang Suan Shu* vs Euclid's Elements. Aspects of proof and the linguistic limits of knowledge, *Int. J. Eng. Sci.*, 36, 1998, 1339-1359.
25. Tanaka, Y., Mizuno, Y., Kado, T. Chaotic dynamics in Friedmann equation , *Chaos, Solitons and Fractals*, 24,2005, 407-422.

2.Bölüm Kaynakları

1. Andrianov,I,Manevitch,L.Asymptotology:Ideas,Methods,and Applications,Kluwer Academic Publisher,Boston,2003
2. Nayfeh,A.H.Perturbation Methods,John Wiley&Sons,Inc.,Newyork,2000
3. Mickens,R.E.An Introduction to Nonlinear Oscillations,Cambridge Universty Press,Cambridge,1981
4. He,J.H.Modified Lindsted-Poincaré methods For Some Strongly Nonlinear Oscillations,
Part I:Expansion of a Constant.Int.J.Nonlinear Mech.,37(2),2001,309-314
5. He,J.H. Some symptotic methods for strongly nonlinear equations,International Journal of Modern Physics B,20(10),2006,1141-1199
6. He,J.H.Recent developments in asymptotic methods for nonlinear ordinary equations,Invited Lecture Delivered at 10th International Colloquium on Numerical Analysis and Computer Science with Applications,Plovidiv,Bulgaria,August 12-17,2001.International Journal of Computational and Numerical Analysis and Applications,2(2),2002,127-190
- 7.He,J.H.An analytic solution to certain nonlinear equations in plasma physics,Ukrainian Journal of Physics,46(5),2001,567-568

8.He, J.H. Asymptotic Methods in Engineering and Sciences (Gongheng yu Kexue Jisuan zhong de Jinsi Fangfa), Henan Science and Technology Press, 2001 (In Chinese)

9.He, J.H. Modified Lindstedt-Poincaré methods for some strongly nonlinear oscillations.

Part II: a new transformation, *Int.J.Nonlinear Mechanics*, 37(2), 2001, 315-320

10.Dai, S.Q., Sigalov, G.F. and Diogenov, A.V. Approximate analytical solutions for some strongly nonlinear problems, *Science in China (Series A)*, 2(1990), 153-162

11.Dai, S.Q. On the generalized PLK method and its applications, *Acta Mechanica Sinica*, 6(2), 1990

12.Dai, S.Q. Generalization of the method of full approximation and its applications, *Applied Mathematics and Mechanics*, 12(3), 1991

13.He, J.H. Bookkeeping parameter in perturbation methods, *Int. J.Nonlinear Sci. & Numerical Simulation*, 2(3), 2001, 203-214

14.He, J.H. Modified Lindstedt-Poincaré Methods for some strongly nonlinear oscillations.

Part III: double series expansion, *International Journal of Non-Linear Science and Numerical Simulation*, 2(4), 2001, 317-320

15. Aziz, A. & Na, T. Y. Perturbation Methods in Heat Transfer, Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1984
16. Nayfeh, A. H. Introduction to perturbation Techniques, John Wiley & Sons, New York, 1985
17. Hagedorn, P. Nonlinear Oscillations (translated by Wolfram Stadler), Clarendon Press, Oxford, 1981
18. G. M. Andersen, J. F. Geer, SIAM J. Appl. Math. 42, 678 (1982)
19. Bellman, R. Perturbation Techniques in Mathematics, Physics, and Engineering, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1964
20. Mickens, R. E. Comments on the Shohat Expansion, J. Sound & Vibration, 193(3), 1996, 747-749
21. Bellman, R. Perturbation Techniques in Mathematics, Physics, and Engineering, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1964
22. Shohat, J. On van der Pol's and related nonlinear differential equations, J. Appl. Phy., 15, 1944, 568-574

3.Bölüm Kaynakları

1. He, J.H. *Asymptotic Methods in Engrineering and Sciences (Gongcheng yu Kexue Jisuan zhong de Jinsi Fangfa)*, Henan Science and Technology Pres, 2001 (in Chinese).
2. He, J.H. Newton-like iteration method for solving algebraic equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 3(2), 1998,92-97.
3. He, J.H. Homotopy perturbation technique, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 178(3-4), 1999,257-262.
4. He, J.H. Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique, *Applied Mathematics and Computation*, 135(1), 2002, 73-79.
5. He, J.H. A coupling method of a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems, *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 35(1), 2000, 37-43.
6. He, J.H. Asymptotology by homotopy perturbation method, *Applied Mathematics and Computation*, 156(3), 2004, 591-596.
7. He, J.H. Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method, *Applied Mathematics and Computation*, 156(2), 2004, 527-539.
8. He, J.H. The homotopy perturbation method for nonlinear oscillators with discontinuities., *Applied Mathematics and Computation*, 151(1), 20004,287-292.

9. He, J.H. Homotopy Perturbation Method for Bifurcation of Nonlinear Problems, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 6(2), 2005, 207-208.
10. He, J.H. Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, 26(3), 2005, 695-700.
11. Nayfeh, A.H. introduction to Perturbation Techniques, John Wiley & Sons, New York, 1981.
12. Mickens, R.E., Oyediji, K.; Rucker, S.A. Preliminary analytical and numerical investigations of a van der Pol type oscillator having discontinuous dependence on the velocity, *Journal of Sound and Vibration*, 279, 2005, 519-523.
13. He, J.H. Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations, *International Journal of Modern Physics B*, 20 (10), 2006, 1141-1199.
14. Braun, M. Differential equations and their application, an introduction to applied mathematics, *Applied Mathematical Sciences* (3rd edition), vol. 15, Springer-Verlag, New York, 1983, pp. 120-122.
15. He, J.H. Variational iteration method: a kind of nonlinear analytical technique: some examples, *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 34(4), 1999, 699-708.
16. Liu, G.L, New research directions in singular perturbation theory: artificial parameter approach and inverse-perturbation technique, in CHENG Chang-jun et al Ed. *Modern Mathematics and Mechanics* (MMM)-VII, Shanghai, Shanghai University Press, 1997: 47-53 (in Chinese).

17. Liao Shijun A new kind of Nonlinear Analytical Method based on Homotopy technology, *shanghai Mechanics*, 15(2), 1994, 28-33 (in Chinese)
18. Liao Shijun: Homotopy analysis method: a new analytic method for nonlinear problems, *tAppl.Math.Mech. (English Ed)* 19(10), 1998, 957-962.
19. Liao, S.J. A uniformly valid analytic solution of two-dimensional viscous flow over a semi-infinite flat plate, *J. Fluid Mech.*, 385,1999,101-128.
20. Howarth, L. 1938 On the solution of the laminar boundary layer equation. *Proc. R. Soc. Lond. A.* 164, 547-579.
21. Hartree, D.R. on an equation occurring in Falkner-Skan approximate treatment of the equations of the boundary layer. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 33(1937), 223-239.
22. Stewarston, K. Further solutions of the Falkner-Skan equation, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 50(1954), 454-465.
23. White, F.M. *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, 1991.
24. Bender, C.M., Milton, K.A., Pinsky, L.M., et al. A new perturbative approach to nonlinear problems, *J.Math. Physics*, 30(7)(1987) 1447-1455.
25. Wazwaz, A.M. The modified decomposition method and Pade approximants for solving the Thomas-Fermi equation, *Applied Mathematics and Computation*, 105(1999), 11-19.
26. Kobayashiy, S., Matsukuma, T., Nagai, S., Umeda, K. Some coefficients of the TFD function, *J.Phys.Soc. Japan*, 10(1955) 759-765.

27. He, J.H. Variational approach to the Thomas-Fermi equation, *Applied Mathematics and Computation*, 2003, 143 (2-3), 533-535.
28. He, J.H. Bookkeeping in perturbation methods, *Int. J. Nonlinear Sci. & Numerical Simulation*, 2(3), 2001, 203-214.
29. Liao, S.J. *beyond Perturbation*, CRC Pres, Roca Raton, 2004.
- 30.1 He, J.H. Variational principles for some nonlinear partial differential equations with variable coefficients, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004, 19(4), 847-851.
31. Yao, Y. Abundant families of new traveling wave solutions for the coupled Dinfel'd-Sokolov-Wilson equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, 24,2005,301-307.
32. Fu Z, Liu S, Liu, S. Multiple structures of 2-D nonlinear Rossby wave, *Chaos, Solitons & Fractals*, 24,2005,383-390.
33. Shen J, Xu W. Bifurcations of Smooth and Non-Smooth Travelling Wave Solutions of the Degasperis-Procesi Equation, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation* 5(4), 2004, 397-402.
34. S.A. Khuri, A complex tanh-function method applied to nonlinear equation of Schrödinger type, *Chaos, Solitons and Fractal*, 20(4), 2004, 1037-1040.
35. Mickens, R.E. A phase analysis of a nonlinear oscillator equation, *Journal of Sound and Vibration*, 204(3), 1997, 556-559.
36. Hamdan, M.N., Shabaneh, N.H. On the period of large amplitude free vibration of conservative autonomous oscillators with static and inertia type cubic nonlinearities, *Journal of Sound and Vibration*, 199(5), 1997, 737-750.

37. Micken, R.E. Mathematical and numerical study of the Duffing-Harmonic oscillator, *Journal of Sound and Vibration*, 244(3), 2001, 563-567.
38. Micken, R.E. Oscillations in an $x^{4/3}$ potential, *Journal of Sound and Vibration*, 246(2), 2001., 375-378.
39. Beatty, J., Micken, R.E. A qualitative study of the solutions to the differential equation $\ddot{x} + (1 + x^2)x = 0$, *Journal of Sound and Vibration*, 283, 2005, 475-477.
40. Mickens, R.E. Periodic solutions of the relativistic harmonic oscillator, *Journal of Sound and Vibration*, 212(5), 1998, 905-908.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Muş'un Bulanık ilçesinde doğdu. İlkokulu Çimentaş İlkokulunda, Ortaokulu ise Gültepe Ortaokulunda okudu. 1998 yılında İzmir Atatürk Lisesinden mezun oldu. Aynı yıl Ege Üniversitesi Matematik Bölümünü kazandı. 2002 yılında Matematik Bölümü 2.si ve Fen Fakültesi 4.sü olarak Matematik Bölümünden (Uygulamalı Matematik Ağırlıklı) mezun oldu.

2002 yılında Ege Üniversitesi Matematik Bölümünde yüksek lisans eğitimine, 2006 yılında ise yine aynı bölümde doktora eğitimine başlamıştır.

Çeşitli SCI indeksli dergilerde 30'dan fazla bilimsel yayını ve Ulusal - Uluslararası konferanslarda 60'dan fazla bildirisi bulunmaktadır. Ayrıca 10'dan fazla SCI indeksli dergide hakemlik yapmaktadır.

2003 yılından beri Ege Üniversitesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.