Zafer Ercan'ın "Topoloji" isimli kitabı ile ilgili görüşlerim

Zafer Ercan'ın büyük bir emeğin eseri olduğu belli olan Topoloji isimli kitabının bence Nesin Yayınları arasında yer almalıdır.

Kitap topolojiye ilgi duyan matematikçiler ve matematik öğrencileri için bir çok temel konuyu kapsıyor. Bildiğim kadarıyla, Gilman&Jerison'un Rings of continuous Functions isimli kitabında yer alan kavramların özetlendiği, düzgün uzay (uniform space) kavramının yer aldığı ve topolojinin gelişim sürecinden bir takım kesitlerin türkçe yazıldığı ilk kitap budur. Topolojinin tarihi konusunda oldukça ayrıntılı bir inceleme yapıldığı anlaşılıyor.

Kitapta örnekler yeteri kadar zengin ve ilginç.

Son tahlilde kitabın Nesin Yayınevi tarafından basılmasının türkçe basılı matematik literatürüne önemli bir katkı sağlayacağına inanıyorum.

Kitapta kullanılan formel dilden olabildiğince uzak durmaya çalışılıyor. Bu iyi bir seçim olmakla beraber bazen bu seçimin kavramın anlaşılmasını zorlaştırdığını düşünüyorum. Örneğin filtrenin tanımı ele alalım :

"Boş olmayan bir kümenin boş kümeden farklı , boş kümeyi içermeyen, sonlu arakesit işlemi altında kapalı ve üstküme işlemi altında kapalı olan kuvvet kümesinin bir altkümesine filtre denir."

Doğrusu filtre kavramıyla çok yakın tanışık olmama rağmen bu tümceyi bir kaç kere okumam gerekti. Bu sözlerle ve özellikle üst küme işlemi ile ne demek istendiği tanımın altındaki paragrafta formel olarak yazılmış. Kişisel olarak bu durumda formel tanımın çok daha anlaşılır olduğunu düşünüyorum.

Yeniden gözden geçirilmesinde fayda olabileceğini düşündüğüm gözlemler

Sayfa 12 : "..Mesafe kavramını ihmal ederek solid dikdörtgen[3] ile silindir arasında da topolojik olarak fark görmeyeceğiz."

3 numaralı dipnotda " Tam formal bir tanımlama olmasa da sınırları ve iç bölgesi tarafından oluşturulan bölgeye "solid" bölge diyebiliriz. " deniyor.

Burada "..Mesafe kavramını ihmal ederek solid **dikdörtgenler prizması**[3] ile **solid** silindir arasında da topolojik olarak fark görmeyeceğiz." denmek istenmiş olmalı aksi halde tümce doğru değil.

Sayfa 13, 1.10(ii) : Bağlantılı olma kavramı olmadan $(0, 1)$ uzayının $(0, x) \cup (x, y) \cup (y, 1)$ uzayına denk olmayacağı sezgisel olarak açık olmakla beraber matematiksel olarak açık olmaktan çok uzaktır. Nitekim Teorem 5.12. sıra uzayın bağlantılı olması için gerek ve yeter koşulları vermektedir. Buradan $(0, 1)$ uzayının bağlantılı olduğunun, gerçel sayıların supremumların (ve infimumların) varlığına dayanmayan bir kanıtı olamayacağı anlaşılıyor.

Bu nedenle sanki "... bu uzayların denk olamayacağı birinin bağlantılı diğerinin ise kopuk olması nedeniyle sezgisel olarak görülür." denmesi daha iyi olabilir.

Sayfa 13, 1.15 : Kompaktlık ne demek? Bu kavramın bu aşamada sezgisel bir anlamı var mı? Onun yerine $X = \big\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\big\}$ uzayından $Y = \big\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\big\}$ uzayına denk olmadığını görmek için X de $\big(1 - \frac{1}{n}, 0\big)$ dizisinin görüntüsü (x_n, y_n) olduğuna göre bu dizinin yakınsak bir alt dizisi olduğunu calculus yötemleri ile göstermek suretiyle bir çelişkiye ulaşması önerilebilir. Doğal olarak bunu yapmak için calculus dersinde sınırlı dizilerin yakınsak alt dizilerinin olacağının söylenmiş olması gerekir.

Kuşkusuz burada vurgulanmak istenen fikir şudur: İki uzaydan birinin sağladığı bir topolojik değişmezi diğeri sağlamıyorsa uzaylar homeomeorfik olamaz. Acaba ileride öğrenilecek olan kompaktlık kavramının bir topolojik değişmez olduğunu ve bu uzaylardan birinin bunu sağlayıp diğerinin sağlamadığını söylemek yeni topoloji öğrenmeye başlayan biri için, topolojik bazı değişmezlerin uzayları ayırd etmede işe yarayacağını anlamaları bakımından daha heyecan verici olmaz mı?

Sayfa 13, 1.16 : Bir konveks kümenin içi ne demek? $\mathbb{R}^2$ de $X = [0,1] \times \{0\}$ konvekstir fakat $S = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ çemberine denk değildir.

Sayfa 19, 1.19(e) : $s^{-1}\left(S \cap \mathbb{Q}^2\right)$ olmalı.

Sayfa 21, 1.24 : "İki boyutlu uzayda **dönme eksenini kesmeyen** bir konumda bulunan bir çember" alınmalıdır.

"Örneğin 1 yarıçaplı ve $((2,0)$ merkezli çemberin xy **düzleminde** ...." olmalı.

Sayfa 21, 1.25 : "Bir kahve fincanının dış yüzeyi ile bir simidin dış yüzeyinin farkı yoktur" örneği simidin, yani torusun yüzeyi ile **- Klein şişesi değil!-**kahve fincanının dış yüzeyi denktir demektir. Torus ile Klein şişesi homeomorf değildir!

Sayfa 40, Dipnot 14. : "Bunu saymak için parmak yöntemi kullanmak **salakça** olsa da ....". Acaba bir okuyucunun parmak yöntemini bu dipnotu okumadan denemiş olma olasılığını gözönüne alarak okuyucuyu incitmemek için bu dipnot, parmakla sayma işinin cevaba ulaşmak için oldukça ümitsiz olduğunu söyleyecek şekilde değiştirilebilir mi?

Sayfa 58 : "Teorem 3.2.......B'nin X'te bir topoloji olması için....." , "Teorem 3.2.......B'nin X'te bir topolojinin tabanı olması için...."

Sayfa 120 : 1111111111111111111111111 gereksiz.

Alıştırma 6.31 doğru değil

Örnek : $X = \{a,b\}$, $\mathcal{F}_a = \{\{a\}, X\}$. O zaman $X \times X$ de

$$\mathcal{F} = \{\{(a,a)\}, \{a\} \times X, X \times \{a\}, X \times X\}$$

dir. $\{(a,a)\} \subset \{(a,a), (b,b)\}$ fakat $\{(a,a), (b,b)\} \notin \mathcal{F}$ dir. O halde $\mathcal{F}$ bir filtre değildir.

Bu önemli bir eksiklik değil aslında. Kartezyen çarpıma yönelik faydalı sonuç Alıştırma 6.32 de verilmiştir.

Sayfa 300. Tanım 12.1. tanımını gözönüne alarak Teorem 12.1. de söz edilen homomorfizmanın bir halka homomorfizması olduğunu varsayıyorum. Bu durumda kanıtı yaparken dikkatli olmak gerekir. Birimi bire götüren bir halka homomorfizmasının $r \in \mathbb{R}$ için sabit $\widetilde{r}(x) = r$ fonksiyonunun r'ye götürdüğünü bilmiyoruz. Dolayısıyla, bu ayrıntı ile uğraşmamak için, kanıtın sonunda "X kompakt olduğundan bir $0 < n$ tamsayısı için $\widetilde{\frac{1}{n}} \leq g$ eşitsizliğini sağlar. Buradan

$$\widetilde{1} \leq ng \Longrightarrow 1 \leq n\pi(g) \Longrightarrow \frac{1}{n} \leq \pi(g) = 0$$

çelişkisi elde edilir." yazmak daha iyi olabilir.

Sayfa 304-305. Burada "Tümüyle düzenli X uzayının kompaktlamalarının **kümesi** $\mathcal{C}(X)$ ile gösterilecektir. Yukarıdaki teoremin sonucu olarak $\mathcal{C}(X)$, boş kümeden farklıdır." ibaresininden X uzayının Hausdorff kompaktlamalarından söz edildiğini ve denk kompaktlamalar arasında fark gözetilmediği varsayıldığı anlaşılıyor. Çünkü tümüyle düzenli herhangi bir X (Hausdorff olsun, olmasın) tüm kompaktlamarı topluluğu bir küme değildir. Fakat bu durumda tümüyle düzenli bir X uzayı için $\mathcal{C}(X)$'in boş kümeden farklı olduğunun, Alexandroff tek nokta kompaktlamasını kullanarak anlaşılması olanaksız. Çünkü tümüyle düzenli ve **kompakt olmayan** bir X uzayının Hausdorff olan tek nokta kompaktlaması olması için gerek ve yeter koşul X uzayının **yerel kompakt** olmasıdır. Sanırım Tanım 12.8 ve Teorem 12.8'in bu gerçekleri dikkate alacak şekilde yeniden kaleme alınması gerekir.

Sayfa 306. Sonuç 12.11. Bu sonuçun, açık olduğu gerekçesi ile kanıtlanmayan kısmı doğru değil. [52] L. Gilman and M. Jerison. "Rings of continuos functions" kitabının $6C.2$. problemi buna bir örnek veriyor.

$S = \mathbb{R} - \mathbb{N}$ ve $X = S - \{0\}$. X, S de yoğun olduğundan βS de de yoğundur. Açık olarak βS ile βX homeomorftur. Fakat X uzayı βS içine $C^{*}-$ gömülü değildir. O halde βS, X'in Stone-Cech kompaktlaması değildir.

Sonuçun doğru olması için aşağıdaki şekilde yazılmış olması gerekir.

"**Sonuç 12.11.** X tümüyle düzenli uzay olsun. $c_{\infty}X \in \mathcal{C}(X)$ olmak üzere her $cX \in \mathcal{C}(X)$ için $cX \leq c_{\infty}X$ olması için gerek ve yeter koşul $c_{\infty}X$ ve βX uzaylarının **X'i sabit bırakacak çekilde** homeomorfik olmalarıdır."